(1.0) Lineare Gleichungssysteme

$\boldsymbol{A\,x = b}$ $\qquad (a_{\mathrm{ij}})\vec{x} = \vec{b}$ $\qquad \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} a_{\mathrm{ij}}\, x_{\mathrm{j}} = b_{\mathrm{i}} \qquad \mathrm{i} = 1,2,\ldots,m \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,n$

$\boldsymbol{x = A^{-1}\, b}$.

(1.1) Determinanten

CRAMER-Regel $\quad x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}$

$\boldsymbol{A_j}$ erhält man aus der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$,
wenn man die j-te Spalte durch $\boldsymbol{b}$ ersetzt.

Berechnung der Determinanten det $\boldsymbol{A}$ = | $\boldsymbol{A}$|

a) det $\boldsymbol{A}$ = $\sum (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{ij})$. det $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ij}}$ ist die Unterdeterminante zum Element a_{ij}.

b) det $\boldsymbol{A}$ = $\prod r_{ii}$ $\qquad$ $(\mathrm{r}_{\mathrm{ij}}) = \boldsymbol{R}$ ist die Dreiecksmatrix zu $\boldsymbol{A}$.

c) für n = 2: det $\boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

d) für n = 3: $\det \boldsymbol{A} = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$ $\qquad$ (SARRUS-Regel)

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

e) det $\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$ = det $\boldsymbol{A}$. $\qquad \det \boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}$

(1.2) GAUß-JORDAN-Verfahren

$$\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b} \xrightarrow[\text{elementareUmformung}]{\text{Pivot-Elemente } a_{\mathrm{ii}}=1} \boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{x} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

(1.3) GAUß-JORDAN-Verfahren mit Wahl der maximalen Pivot-Elemente.

Die Spalten in der Matrix $\boldsymbol{E}$ sind dann entsprechend vertauscht.

(1.4) GAUß-Verfahren

α, β... sind die veränderten Variablen *a, b,...*

$$\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b} \xrightarrow{\text{elementareUmformung}} \boldsymbol{R} \,|\, \beta = \left(\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \beta_1 \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \beta_2 \\ 0 & 0 & r_{33} & \beta_3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1 = (\beta_1 - r_{13}x_3 - r_{12}x_2)/r_{11} \\ x_2 = (\beta_2 - r_{23}x_3)/r_{22} \\ x_3 = \beta_3 / r_{33} \end{array} \right.$$

Eliminationsfaktoren $l_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ speichern, Elimination: $\alpha_{21} = a_{21} - l_{21} \cdot a_{11}$ usw.

$$x_n = \beta_n / r_{nn}. \qquad x_j = \left(\beta_i - \sum_{k=j+1}^{n} r_{ij} x_j \right) / r_{ii} \qquad j = n-1, n-2, \ldots, 1$$

(1.5) LR-Zerlegung:

$$\boldsymbol{A\,x = b}, \qquad \boldsymbol{A = L\,R}, \qquad \boldsymbol{L\,y = b}, \qquad \boldsymbol{R\,x = y}$$

1. $r_{1k} = a_{1k}$ für $k = 1, 2, \ldots n$
2. für jedes $i = 2, 3, \ldots, n$

   2.1 für $k = 1$: $\quad l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

   2.2 für $k = 2, 3, \ldots, i-1$: $\quad l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} r_{jk}) / r_{kk}$

   2.3 für $k = i, i+1, \ldots, n$: $\quad r_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_{jk}$

3. $\boldsymbol{y}$ mit Vorwärtseinsetzen aus $\boldsymbol{L\,y = b}$
4. $\boldsymbol{x}$ mit Rückwärtseinsetzen aus $\boldsymbol{R\,x = y}$

Schema zum verketteten Algorithmus:

	R	**y**	**x**
L	***A***	**b**	

LR-Zerlegung, verketteter Algorithmus für $n = 3$

Reihenfolge:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & \underline{|2.} & \underline{|3.} \\ 0 & 0 & \underline{|6.} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{|1.} & 1 & 0 \\ \underline{|4.} & \underline{|5.} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & a_{22} - r_{12} l_{21} & a_{23} - r_{13} l_{21} \\ 0 & 0 & a_{33} - r_{13} l_{31} - r_{23} l_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/r_{11} & 1 & 0 \\ a_{31}/r_{11} & \dfrac{a_{32} - r_{12} l_{31}}{r_{22}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung, verketteter Algorithmus für $n = 4$

Reihenfolge:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & \underline{|2.} & \underline{|5.} & \underline{|10.} \\ 0 & 0 & \underline{|6.} & \underline{|11.} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{|12.} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{|1.} & 1 & 0 & 0 \\ \underline{|3.} & \underline{|4.} & 1 & 0 \\ \underline{|7.} & \underline{|8.} & \underline{|9.} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(1.6) Spur einer Matrix: $\text{spur}\,\boldsymbol{A} = \text{tr}\,\boldsymbol{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

(1.7) Inverse Matrix

$\boldsymbol{A}$ ist invertierbar, wenn $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.
$\boldsymbol{A}^{n,n}$ ist invertierbar, wenn $\text{rang}\,\boldsymbol{A} = n$.
$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$. $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{T} = (\boldsymbol{A}^{T})^{-1}$. $(k\,\boldsymbol{A})^{-1} = s^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$\det \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}$$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ sind ähnlich, wenn eine reguläre Matrix $\boldsymbol{U}$ existiert, für die gilt: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{-1}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{U}$.

(1.8) Inverse Matrix und Determinante mit FADDEJEW-Verfahren

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{c_n} \cdot \boldsymbol{H}_{n-1} \qquad \det \boldsymbol{A} = (-1)^{n+1} c_n$$

mit

	$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{A}_1 - c_1 \cdot \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{A}_2 - c_2 \cdot \boldsymbol{E}$	$\cdots$	$\boldsymbol{H}_n = \boldsymbol{O}_{(n,n)}$
$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{H}_1$	$\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{H}_2$	$\cdots$	
$c_1 = \frac{spur\,\boldsymbol{A}_1}{1}$	$c_2 = \frac{spur\,\boldsymbol{A}_2}{2}$	$c_3 = \frac{spur\,\boldsymbol{A}_3}{3}$	$\cdots$	

(1.9) LEONTIEF-Modell, Input-Output-Analyse

Gozintomatrix^{3,3}
$$\boldsymbol{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{33} & y_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & y_3 \end{array}\right)$$

Verflechtungsmatrix $\boldsymbol{A}$ mit $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$

Verflechtungsgleichung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$
Bedarfsvektor $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{y}$

(1.10) GAUß-SEIDEL-Verfahren

Zeilensummenkriterium auf sichere Konvergenz prüfen. $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$

Umgewandeltes lineares Gleichungssystem $a_{ii}\, x_j = b_i + \boldsymbol{Cx}$. $c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } i = j \end{cases}$

Rechenschema: $\vdots$

a_{ii}	b_i	C_R / C_L			$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Iteration:
$$x_i = \left(b_i + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}\, x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}\, x_j^{(k+1)} \right) / a_{ii}$$
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{C_R}\, \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{C_L}\, \boldsymbol{x}^{(k+1)}) : a_{ii}$$

(2.1) Eigenwert-Probleme

Eigengleichung $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$

Charakteristisches Polynom

$$y(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E}) = (-1)^n\,\lambda^n + q_{n-1}\,\lambda^{n-1} + q_{n-2}\,\lambda^{n-2} + \ldots + q_1\,\lambda + q_0$$

$$q_n = (-1)^n. \quad q_{n-1} = \text{spur}\,\boldsymbol{A}\cdot(-1)^{n-1}. \quad q_0 = \det \boldsymbol{A}$$

Eigenvektoren aus $(\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ mit $\text{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) < n$

Satz von CAYLEY-HAMILTON $y(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

(2.2) Normierung von Vektoren $\boldsymbol{v}$

a) 1. Komponente hat den Wert eins. v_i / v_1

b) Länge hat den Betrag eins. $v_i \Big/ \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_m^2}$

c) Prozentanteile, zusammen 100% = 1. $v_i \Big/ \sum v_i$ wobei alle $v_i \geq 0$ oder alle $v_i \leq 0$.

d) Ganzzahlig. Mit entsprechendem Faktor multiplizieren.

(2.3) FADDEJEW-Verfahren

charakteristisches Polynom

$$y(\lambda) = (-1)^{n+1}\,[-\lambda^n + c_1\,\lambda^{n-1} + c_2\,\lambda^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\,\lambda + c_n]$$

mit $c_i = \dfrac{\text{spur}\,\boldsymbol{A}_i}{i}$ mit $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{H}_{i-1}$ und $\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{A}_i - c_i\boldsymbol{E}$ siehe (1.8)

für Eigenwerte λ_k, Matrix $\boldsymbol{A}^{n,n}$, Grad des Polynoms n.

Matrix $\boldsymbol{U}$ mit den Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_k$ als Spalten

$$\boldsymbol{U}_k = \lambda_k^{n-1}\boldsymbol{E} + \lambda_k^{n-2}\boldsymbol{H}_1 + \lambda_k^{n-3}\boldsymbol{H}_2 + \ldots + \boldsymbol{H}_{n-1}$$

Zum Beispiel Berechnung der Eigenvektoren mit den 1. Spalten:

$$\boldsymbol{u}_{k,1} = \lambda_k^{n-1}\boldsymbol{e}_1 + \lambda_k^{n-2}\boldsymbol{h}_{1,1} + \lambda_k^{n-3}\boldsymbol{h}_{2,1} + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{h}_{n-2,1} + \boldsymbol{h}_{n-1,1}$$

mit $\boldsymbol{h}_{i,1}$ als 1.Spalte der Hilfsmatrix $\boldsymbol{H}_i$

Oder mit HORNER-Form

$$\boldsymbol{u}_{k,1} = \Big(\Big(\big(\boldsymbol{e}_1\lambda_k + \boldsymbol{h}_{1,1}\big)\lambda_k + \boldsymbol{h}_{2,1}\Big)\lambda_k + \ldots + \boldsymbol{h}_{n-2,1}\Big)\lambda_k + \boldsymbol{h}_{n-1,1}$$

(2.4) MARKOW-Ketten, Stationäres Gleichgewicht

Stochastische Matrix $\boldsymbol{S}$ mit $0 \leq s_{ij} \leq 1$ und $\sum s_{i\bullet} = 1$

Verteilungen $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{v}_{k-1}$ $\quad \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{S}^k\,\boldsymbol{v}_0$.

Stationäres Gleichgewicht $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{v}_k = \lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{S}^k\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{S}^n\,\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_{\lambda_1=1}$

Eigengleichungen $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_n.$ $\quad (\boldsymbol{S} - \lambda\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$ $\quad (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$

(2.5) Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{k}} = \begin{pmatrix} d_{11}^k & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^k \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{heißt Spektralmatrix}$$

(2.6) NEWTON-Iteration

GERSCHGORIN-Kreise $\quad \mathbb{K}_i = \left\{ z \,\middle|\, |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \dots, n \right\}$

Iterationsformel $\quad x_{\mathrm{k}+1} = x_{\mathrm{k}} - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

HORNER-Form $\quad f(x) = ((a_n x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + \dots + a_0$

(2.7) LR-RL-Verfahren nach RUTISHAUSER

L R – Zerlegungen $\quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{k}} \boldsymbol{R}_{\mathrm{k}}$

R L –Multiplikationen $\quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{k}+1} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{K}} \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}$

Grenzwerte $\quad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{E}$

Rechenschema

$$\begin{array}{ccc} & & \boxed{\boldsymbol{L}_1} \\ & \boxed{\boldsymbol{R}_1} & \boxed{\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{A}_2} \\ \boxed{\boldsymbol{L}_1} & \boxed{\boldsymbol{A}_1} & \\ \hline & & \boxed{\boldsymbol{L}_2} \\ & \boxed{\boldsymbol{R}_2} & \boxed{\boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{A}_3} \\ \boxed{\boldsymbol{L}_2} & \boxed{\boldsymbol{A}_2} & \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

(3.1) Simplex-Verfahren

Zielfunktion $G = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j$ $\quad j = 1 \ldots n$

Bedingungen $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i \quad x_j \ge 0 \quad i = 1 \ldots m$

Tableau

BV	(x_j)	(y_i)	b_i	q_i
(y_i)	(a_{ij})	**E**	(b_i)	$\left(\frac{b_i}{a_{is}}\right)$
$-G$	(g_j)	$\vec{o}$	0	–

Pivot-Spalte: $max\ (g_j)$
Pivot-Zeile: $min\ (q_i) = min\ (b_i / a_{is}) \quad mit\ \ q_i > 0$
Optimum alle $g_j \le 0$

(3.2) Zwei-Phasen-Methode

Gleichungen Gesperrte Schlupfvariable w einführen

Minimierung $-G = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \ge b_i\right) \cdot (-1)$

Mindestbedingungen $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \ge b_i\right) \cdot (-1)$

1. Phase zulässig, wenn $w_k = 0$ und kein $b_i < 0$
2. Phase wie (2.1)

(3.3) Zuordnungen

Bedingungen $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1. \qquad \sum_{1=1}^{n} x_{ij} = 1$

Zielfunktion $C_{gesamt} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \rightarrow \text{Minimum}$

Basisvariable $m = n$

Verfahren
1. Matrixreduktion
2. unabhängige Nullen besetzen
3. Decklinien für alle Nullen =>
   unbedeckte Zellen u, doppelt bedeckte d, einfach bedeckte e
4. min(u) ermitteln
5. bei u: – min(u) bei d: + min(u) bei e: keine Änderung
6. optimal, wenn n unabhängige Null-Elemente
7. Ergebnismatrix ist eine Permutationsmatrix

Variante 1 Maximiere $G_{gesamt} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_{ij}$

Komplementärmatrix mit $c_{ij} = k - g_j$.

Variante 2 Fiktive Bestimmungsorte, wenn $\sum a_i > \sum b_j$

(3.4) Transportverfahren

Bedingungen $\sum a_i = \sum b_j$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1,\ldots,m). \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \ (j = 1,\ldots,n). \qquad x_{ij} > 0$$

Zielfunktion Minimiere $C_{\text{gesamt}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Matrixminimumverfahren: $\max(x_{ij}) \mapsto \min(c_{ij})$

Hilfsvariable $u_i = c_{ij} - v_j$ und $v_j = c_{ij} - u_i$

Kostendifferenzen $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

Optimal, wenn alle $d_{ij} \geq 0$

(4.1) Polynom-Interpolation

Polynome $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$

HORNER-Form $f(x) = ((a_n x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + \ldots + a_0$

VANDERMONDE-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$ lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{Va} = \boldsymbol{y}$

(4.2) Interpolation nach NEWTON

NEWTON-Form für Polynome

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

HORNER-Form für NEWTON-Polynome

$$f(x) = \Big(\Big(\big(c_n\,(x - x_{n-1}) + c_{n-1}\big)(x - x_{n-2}) + \ldots c_2\Big)(x - x_1) + c_1\Big)(x - x_0) + c_0$$

Dividierte Differenzen $[x_k x_i] = \dfrac{y_k - y_i}{x_k - x_i}$. $\quad [x_k x_i x_h] = \dfrac{[x_k x_i] - [x_i x_h]}{x_k - x_h}$

Interpolationsschema

i	x_i	y_i				
0	x_0	$y_0 = c_0$				
			$[x_1 x_0] = c_1$			
1	x_1	y_1		$[x_2 x_1 x_0] = c_2$		
			$[x_2 x_1]$		$[x_3 x_2 x_1 x_0] = c_3$	$\cdots$
			$\vdots$		$\vdots$	
2	x_2	y_2		$[x_3 x_2 x_1]$		
			$[x_3 x_2]$			
3	x_3	y_3				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

(4.3) Spline-Interpolation

Kubische Splinefunktion

$$s_i(x) = \begin{cases} a_0 \cdot (x-x_0)^3 + b_0 \cdot (x-x_0)^2 + c_0 \cdot (x-x_0) + d_0 & \text{für } x \in [x_0 , x_1] \\ a_1 \cdot (x-x_1)^3 + b_1 \cdot (x-x_1)^2 + c_1 \cdot (x-x_1) + d_1 & \text{für } x \in [x_1 , x_2] \\ \ldots & \\ a_{n-1} \cdot (x-x_{n-1})^3 + b_{n-1} \cdot (x-x_{n-1})^2 + c_{n-1} \cdot (x-x_{n-1}) + d_{n-1} & \text{für } x \in [x_{n-1} , x_n] \end{cases}$$

Spline-Entwicklung

$$d_i = y_i \qquad b_0 = 0 \qquad b_n = 0$$

$$(x_i - x_{i-1})\, b_{i-1} + 2\,(x_{i+1} - x_{i-1})\, b_i + (x_{i+1} - x_i)\, b_{i+1} = 3 \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) = r_i$$

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$	b_{n-1}	r_i
$i=1$	$2(x_2 - x_0)$	$x_2 - x_1$	0	0	$\cdots$	0	r_1
$i=2$	$x_2 - x_1$	$2(x_3 - x_1)$	$x_3 - x_2$	0	$\cdots$	0	r_2
$i=3$	0	$x_3 - x_2$	$2(x_4 - x_2)$	$x_4 - x_3$	$\cdots$	0	r_3
$i=4$	0	0	$x_4 - x_3$	$2(x_5 - x_3)$	$\cdots$	0	r_4
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$
$i=n-1$	0	0	0	0	0	$2(x_n - x_{n-2})$	r_{n-1}

$$a_{i-1} = \frac{b_i - b_{i-1}}{3(x_i - x_{i-1})}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{(b_{i+1} - b_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)}{3} - b_i (x_{i+1} - x_i)$$

(4.4) BERNSTEIN-Polynome

Binomialentwicklung $\quad \left(a+b\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n$

Rekursive Berechnung $\quad B_i^n = a \cdot B_i^{n-1} + b \cdot B_{i-1}^{n-1}$

BERNSTEIN-Polynome $\quad B_i^n(x) = \left(\left(1-x\right)+x\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i = 1 \quad$ für $0 \le x \le 1$

(4.5) Bézier-Interpolation

Punkte des BÉZIER-Polygons $\quad \left(\frac{i}{n} \middle| y_i \right)$

BÉZIER-Polynome

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^{n} y_i B_i^n(x) \qquad \text{für } 0 \le x \le 1$$

$$f(x) = y_0 B_0^3 + y_1 B_1^3 + y_2 B_2^3 + y_3 B_3^3$$

$$f(x) = y_0 (1-x)^3 + y_1 3 \cdot (1-x)^2 x + y_2 3 \cdot (1-x) \cdot x^2 + y_3 x^3$$

$$f(x) = \left(\left(y_0 (1-x) + 3 y_1 x \right) \cdot (1-x) + 3 y_2 x^2 \right) \cdot (1-x) + y_3 x^3$$

noch (4.5) Bézier-Interpolation

Rekursive Berechnungen

$$B_i^n(x) = (1-x)\cdot B_i^{n-1} + x\cdot B_{i-1}^{n-1}$$
$$y_i^{(n)} = y_i^{(n-1)}(1-x) + y_{i-1}^{(n-1)}x$$

Schema nach DE CASTELJAU

$$\begin{array}{r|llll} & y_0 & & & \\ 1-x & y_1 & y_{01} & & \\ x & y_2 & y_{12} & y_{012} & \\ & y_3 & y_{23} & y_{123} & y_{0123} \end{array}$$

z.B. $y_{012} = (1-x)y_{01} + xy_{12}$

Steigung bei y_{0123} $\quad 3\cdot(y_{123} - y_{012})$

Steigungswinkel $\quad \alpha(x) = \arctan f'(x)$

(4.6) A'–Regression

Ansatzfunktionen $\quad \varphi(x)$

Summe der Abweichungsquadrate $\quad A = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a\,\varphi(x) - b)^2$

Normalgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} \sum \varphi(x_i^2) & \sum \varphi(x_i) \\ \sum \varphi(x_i) & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \varphi(x_i)\, y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

Normalgleichungen

$$\begin{cases} a\sum(\varphi(x_i))^2 + b\sum\varphi(x_i) = \sum y_i\,\varphi(x_i) \\ a\sum\varphi(x_i) + nb = \sum y_i \end{cases}$$

Regressionskoeffizienten

$$a = \frac{n\sum y_i\cdot\varphi(x_i) - \sum y_i \cdot \sum\varphi(x_i)}{n\sum(\varphi(x_i))^2 - \left(\sum\varphi(x_i)\right)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{a}{n}\sum\varphi(x_i)$$

Speziell für $\hat{y} = m\,x + b$

$$m = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{m}{n}\sum x_i$$

(4.7) V^T–Regression

Lineare Regressionsmodelle $\quad \hat{y}(x) = a_0 + a_1\varphi_1(x) + a_2\,\varphi_2(x) + \ldots + a_k\,\varphi_k(x)$

mit den Ansatzfunktionen $\quad \varphi_i(x)$

VANDERMONDE-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_k(x_0) \\ 1 & \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_k(x_1) \\ & \cdots & & & \\ 1 & \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_k(x_m) \end{pmatrix}$$

VANDERMONDE-Gleichung $\quad \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\,\boldsymbol{y}$

Interpolationswert für $x = z$ $\quad \hat{y}(z) = a_0 + a_1\varphi_1(z) + a_2\,\varphi_2(z) + \ldots + a_k\,\varphi_k(z)$

(5.1) Potenzreihen

Potenzreihen am Entwicklungspunkt x_0 $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$$

Speziell TAYLOR-Reihen $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Speziell MACLAURIN-Reihen ($x_0 = 0$): $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k$$

(5.2) Binomische Reihen

Binomialkoeffizienten $$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Binomialreihe $$(a+x)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+...+\binom{n}{k}a^{n-k}x^k+...$$

Speziell $a = 1$: $$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+...+\binom{n}{k}x^k+...$$

$$\sqrt{1\pm x}=(1\pm x)^{\frac{1}{2}}=1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2\pm\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\pm-... \quad \text{für } |x|<1$$

$$\sqrt[3]{1\pm x}=(1\pm x)^{\frac{1}{3}}=1\pm\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2\pm\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4\pm-... \quad \text{für } |x|<1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm x}}=\left(1\pm x\right)^{-\frac{1}{2}}=1\mp\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp+... \quad \text{für } |x|<1$$

$$\frac{1}{1\pm x}=(1\pm x)^{-1}=1\mp x+x^2\mp x^3+x^4\mp+... \quad \text{für } |x|<1$$

$$\frac{1}{\left(1\pm x\right)^2}=(1\pm x)^{-2}=1\mp 2x+3x^2\mp 4x^3+5x^4\mp+... \quad \text{für } |x|<1$$

(5.3) Reihen transzendenter Funktionen

$$e^x=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

$$\sin x=\frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-...$$

$$\cos x=\frac{x^0}{0!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-...$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+- \quad \text{für } |x|<1$$

(5.4) Numerische Integration

Zerlegung $h = \dfrac{b-a}{n}$

Sehnen-Trapez-Regel $\int_a^b f(x)\,dx \approx \dfrac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$

SIMPSON-Regel n geradzahlig

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right)\right]$$

Verfahrensfehler $\nu = \dfrac{\left(x_n - x_0\right)^5}{180n^4} \cdot f^{(4)}(z)$ mit $x_0 < z < x_n$

Abbruchbedingung $\left|A_n - A_{2n}\right| < \varepsilon$

(5.5) Differentialgleichungen

Differentialgleichung 1.Ordnung $y' + a(x)\,y = b(x)$

RUNGE-KUTTA-Verfahren, vierstufig $y_{k+1} = y_k + h\,W$

Gewichtung $W = \left(w_1 + 2\,w_2 + 2\,w_3 + w_4\right) / 6$

Zwischenwerte

$$w_1 = g(x_k, y_k)$$

$$w_2 = g\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot w_1\right)$$

$$w_3 = g\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot w_2\right)$$

$$w_4 = g\left(x_k + h, y_k + h \cdot w_3\right)$$

Rechenschema

	x_k	y_k	$y_k' = w_i$	
0				
$h/2$				
$h/2$				
h				W
0	⋮	⋮	⋮	⋮

Fehlerschätzung: $\varepsilon \le h^5$.