

## INHALT

Die Eigengleichung  $A \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

führt zum linearen Gleichungssystem  $(A - \lambda E) \mathbf{u} = \mathbf{0}$

daraus ergeben sich nicht-triviale Eigenvektoren  $\mathbf{u}$ , wenn  $\det(A - \lambda E) = 0$

diese Determinante ergibt das charakteristische Polynom  $y(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + q_{n-1} \lambda^{n-1} \dots$

dessen Nullstellen sind die Eigenwerte  $\lambda_k$

mit den Eigenwerten  $\lambda_k$  ergeben sich die Eigenvektoren aus  $(A - \lambda E) \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Die "vollständige Eigenwertaufgabe" besteht also aus drei Teilen:

I.	II.	III.
Charakteristisches Polynom bestimmen $\checkmark$	Eigenwerte $\lambda_k$ bestimmen $\checkmark$	Eigenvektoren bestimmen $\checkmark$

$A$ ,  $\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$  charakteristische Polynom  $y = -\lambda^3 \dots \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \Rightarrow$  Eigenvektoren

I.	II.	III.
----	-----	------

Verfahren für Matrizen  $A^{n \times n}$  mit  $n < 200$

I. FADDEJEW-Verfahren  $y(\lambda) = (-1)^{n+1} [-\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n]$

II. GERSCHGORIN-HORNER-NEWTON-Verfahren

$a_{ii}$  als Startwerte, HORNER-Schreibweise, NEWTON-Iteration

III. FADDEJEW-Verfahren  $\mathbf{U} = \lambda_k^{n-1} \mathbf{E} + \lambda_k^{n-2} \mathbf{H}_1 + \lambda_k^{n-3} \mathbf{H}_2 + \dots + \mathbf{H}_{n-1}$

Verfahren für Matrizen  $A^{n \times n}$  mit  $n > 200$

Direkte Näherungsverfahren der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transformation}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & . & \dots \\ . & \lambda_2 & . \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = D$$

oder

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transformation}} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots \\ u_{21} & u_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = U$$

## 2.1 EIGENWERTE

Viele technische und physikalische Fragestellungen führen zu Eigenwertproblemen.

Die Bestimmung statischer Konstruktionen, die Ermittlung von Resonanzen an Bauwerken, die Lösung von Differentialgleichungssystemen und viele Aufgaben der Abbildungsgeometrie erfordern die Berechnung von Eigenwerten bzw. Eigenvektoren. → Abschnitt 2.14

Die **Eigengleichung**  $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$  stellt eine lineare Abbildung dar.

In der Abbildungsgeometrie: die Matrix  $A$  streckt den Vektors  $\mathbf{x}$  um das  $\lambda$ -fache.

$\mathbf{x}$  sind die Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda$ .

Eigenvektoren  $\mathbf{x}$  einer linearen Abbildung  $A$  sind Vektoren, die unter der Abbildung nur ihre Länge ändern und zwar um den Faktor  $\lambda$ .

Eigenwert-Probleme **lösen** heißt die unbekanntes **Eigenwerte** und **Eigenvektoren**  $\mathbf{x}$  bestimmen.

Mit der Einheitsmatrix  $E$  ergibt sich:  $A \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} = A \mathbf{x} - \lambda E \mathbf{x} \Rightarrow (A - \lambda E) \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Das ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, weil die "rechte Seite" ein Nullvektor ist.

Für reguläre Matrizen  $A - \lambda E$  gibt es nur triviale Lösungsvektoren  $\mathbf{x} = (0, 0, 0, \dots)$

Nur für singuläre Matrizen  $A - \lambda E$  gibt es nicht-triviale Lösungsvektoren.

$$x_j = \frac{\det M_j}{\det M} \quad \text{mit den vier Fällen:} \quad \begin{array}{ccc} \neq 0 & \neq 0 & 0 \\ \neq 0 & 0 & \neq 0 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}$$

für die Lösungsvektoren  $\mathbf{x}$  gilt dann: einen keinen  $\mathbf{0}$ , trivial beliebig viele

Wir erhalten also nicht-triviale Lösungsvektoren, wenn  $\det(A - \lambda E) = 0$

Beispiel 2.1  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -5 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

mit SARRUS-Regel ergibt sich

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (3-\lambda)(1-\lambda)(-3-\lambda) - 1 \cdot -5 + 5(1-\lambda) + (3-\lambda) + 3 + \lambda \\ &= (3 - 4\lambda + \lambda^2)(-3-\lambda) - 1 \cdot -5 + 5 - 5\lambda + 3 - \lambda + 3 + \lambda \\ &= -9 - 3\lambda + 12\lambda + 4\lambda^2 - 3\lambda^2 - \lambda^3 + 5 - 5\lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = y(\lambda) \end{aligned}$$

1. Das ist das **charakteristische Polynom**  $y(\lambda)$  der Matrix  $A$ .

Eine quadratische Matrix  $A^{n,n}$  hat ein charakteristisches Polynom  $y$  vom Grad  $n$ .

$$y(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + q_{n-1} \lambda^{n-1} + q_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + q_1 \lambda + q_0$$

Ein Polynom vom Grad  $n$  hat  $n+1$  Koeffizienten  $q_0, q_1, \dots, q_n$ .

Hinweis:  $q_n$  ist  $(-1)^n$ ,  $q_{n-1} = \text{spur } A$ . Speziell für  $n = 3$ :  $q_3 = -1$ ,  $q_2 = \text{spur } A$ .

2. Die **Nullstellen** des charakteristischen Polynoms sind die **Eigenwerte**  $\lambda_k$  der Matrix  $A$ .

Die Nullstellen oder Eigenwerte bestimmt man aus der Gleichung  $\det(A - \lambda E) = 0$ .

Das charakteristische Polynom hat  $n$  Nullstellen  $\lambda_k$  (oder  $n$  Eigenwerte  $\lambda_k$ ).

Es gibt reelle, komplexe und mehrfache Nullstellen bzw. Eigenwerte.

Wir beschränken uns auf reelle, einfache Nullstellen.

*Teschl S. 386ff*

3. Jede Matrix erfüllt ihre **eigene** charakteristische Gleichung  $y(A) = \mathbf{0}$

(Satz von CAYLEY-HAMILTON)

$$y(A) = -A^3 + A^2 + 4A - 4E = \mathbf{0} \quad (= \text{Nullmatrix})$$

→ Excel / Eigenvektor

[Cayley, Arthur, Cambridge(GB), 1870] [Hamilton, William R., Dublin 1834]

## 2.2 EIGENVEKTOREN

Die Eigenvektoren  $\mathbf{x}$  zu den Eigenwerten  $\lambda$  ergeben sich als Lösungsvektoren des homogenen linearen Gleichungssystems  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{o}$ .

Die homogenen lineare Gleichungssysteme sind unterbestimmt,  $\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$ .

Es gibt jeweils unendliche viele Eigenvektoren, die sich durch den Faktor  $t$  unterscheiden.

Die Mengen  $t\mathbf{x}$  der Eigenvektoren nennt man Eigenräume.

Nach einer gewissen Anzahl Schritten der GAUß-Elimination erkennt man linear abhängige Zeilen.

Man wählt geeignete Komponenten des gesuchten Eigenvektors und ermittelt durch Rückwärts-Einsetzen die übrigen Komponenten. Teschl S. 322

Weiter Beispiel 2.1 
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Die Matrix  $\mathbf{A}$  hat das charakteristische Polynom  $y(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$

2. Bestimmung der Nullstellen / Eigenwerte  $\lambda_k$

Das charakteristische Polynom  $y(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4$

hat 3 einfache, reelle Nullstellen, das sind die Eigenwerte  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ .

Mit einigem Glück errät man  $\lambda_2 = 1$ , dann führt man die Polynomdivision durch,

$(-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 4$ ; aus  $4 = \lambda^2$  ergibt sich  $\lambda_1 = -2$  und  $\lambda_3 = 2$ .

$$\begin{array}{r} -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 \\ +\lambda^3 - \lambda^2 \\ \hline 0 \quad + 4\lambda - 4 \\ \quad + 4\lambda - 4 \end{array}$$

Polynomdivision, Nullstellensatz: Teschl S. 115ff

3. Bestimmung der Eigenvektoren  $\mathbf{x}_k$  zu den Eigenwerten  $\lambda_k$ . → Excel / Eigenvektor

Für jeden Eigenwert löst man das homogene lineare Gleichungssystem  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{o}$ .

$$\text{zu } \lambda_1 = -2 \quad \begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \quad \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2, \text{ wähle z.B. } x_3 = 1 \Rightarrow \mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{x}_{\lambda_1} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Menge der unendlich vielen Eigenvektoren  $\mathbf{x}_{\lambda_1}$  bilden den Eigenraum zu  $\lambda_1$ .

$$\text{Entsprechend gilt für } \lambda_2 = 1: t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und für } \lambda_3 = 2: t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Normieren der Eigenvektoren, damit sie eindeutig werden → Excel / Eigenvektor

Die Eigenvektoren kann man so normieren dass

a) die 1. Komponente 1 ist. Dazu dividiert man die Komponenten durch  $x_1$ .

b) die Länge 1 ist. Dazu dividiert man die Komponenten durch die Länge  $= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

c) die Komponentensumme  $1 = 100\%$  ist. Nur wenn alle Komponenten positiv sind.

Man dividiert die Komponenten durch  $\sum x_i$ .

d) die Komponenten ganzzahlig und minimal sind: mit passenden Faktoren multiplizieren.

5. Spektralmatrix  $\mathbf{D}_\lambda$  und Transformationsmatrix  $\mathbf{U}$  fassen Eigenwerte und Eigenvektoren zusammen:

$$\text{zum Beispiel 2.1} \quad \mathbf{D}_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \quad \mathbf{U}_{\text{nicht normiert}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2.3 MARKOW-KETTEN**

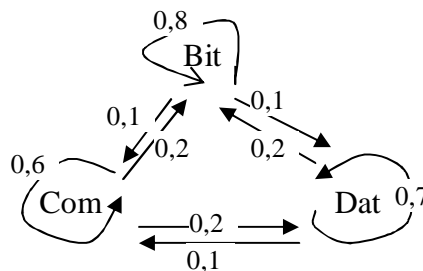
Die einfachste Form dynamischer Verflechtungen sind stationäre Gleichgewichte.

Teschl S. 393

Beispiel 2.2 Eine Käuferwanderung, MARKOW-Kette, stochastische Matrix.

Ein Verlag vertreibt drei Computerzeitschriften; Bit, Com, Dat (B, C, D).  
 Er verkauft insgesamt  $G = 80.000$  Exemplare im Monat und das sei eine konstante Anzahl.  
 Diese 80.000 Exemplare verteilen sich im Januar 2008 auf 32.000 B, 24.000 C, 24.000 D.  
 Die Vertriebsabteilung stellt fest, dass jeden Monat 10% der Käufer von B zu Käufer von C werden, ebenfalls 10% wandern von B zu D. C verliert monatlich 20% an B und D, D selbst verliert 20% an B und 10% an C.

Mit einem Gozintographen wird es übersichtlicher:



Die Übergangsmatrix  $S$  und die Anfangsverteilung  $v_0$  zeigt die Verflechtung deutlicher:

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{von B} & \text{C} & \text{D} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{nach B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \\ \hline \sum s_{i\cdot} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad v_0 = \begin{pmatrix} 32000 \\ 24000 \\ 24000 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $S$  nennt man stochastische Matrix, sie hat besondere Eigenschaften:

1. Die Elemente  $s_{ij}$  sind Prozentwerte oder Wahrscheinlichkeiten.
2. Für alle Elemente gilt  $0 \leq s_{ij} \leq 1$ .
3. Die Spaltensummen sind  $1 = 100\%$ .
4. Das Produkt zweier stochastischer Matrizen ist wieder eine stochastische Matrix.

Die nächste Verteilung  $v_1$  erhält man durch Multiplikation:  $v_1 = S v_0 \dots v_k = S v_{k-1}$

Durch fortlaufende Multiplikation ergeben sich  $v_2 = S v_1 = S^2 v_0 \dots v_k = S^k v_0$ .

→ Excel / Markow

Man erkennt an der Entwicklung, dass die Vektoren  $v_k$  einer Grenzverteilung  $v_n$  zustreben.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k v_0 = v_n = S^n v_0 \qquad \text{im Beispiel: } v_n = \begin{pmatrix} 40000 \\ 16000 \\ 24000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\% \\ 20\% \\ 30\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen  $S^k$  müssen dann auch konvergieren, nämlich zu einer Grenzmatrix  $S^n$ .

Das Potenzieren der Matrix  $S$  führt man am einfachsten mit wiederholtem Quadrieren durch:

Zum Beispiel:  $S^4 = (S^2)^2 \dots S^{15} = S \cdot S^2 \cdot S^4 \cdot S^8$  → Excel / Markow

$$\text{für das Beispiel: } S^{32} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ zeigt ebenfalls diese Grenzverteilung}$$

Das Ergebnis für  $S^{32}$  und allgemein für  $S^n$  ist unabhängig von der Anfangsverteilung  $v_0$ .

## 2.4 STATIONÄRES GLEICHGEWICHT

Ein System steht in einem stationären Gleichgewicht, wenn sich seine Verteilung durch eine weitere Multiplikation mit der Matrix  $S$  nicht mehr ändert.

Grenzmatrix  $S^n$  und Grenzverteilung  $x_n = v_n$  mit  $n \rightarrow \infty$  sind dann erreicht.

In diesem Fall gilt die Eigengleichung  $Sx = x \Rightarrow Sx - x = 0 \Rightarrow (S - E)x = 0$

Das homogene lineare Gleichungssystem liefert beliebig viele nichttriviale Lösungsvektoren  $x$ , wenn die Matrix  $S - E$  singular ist.

Bei stochastischen Matrizen  $S$  ist die Matrix  $S - E$  singular für  $\lambda = 1$ .

Bei stochastischen Matrizen ist also ein Eigenvektor bereits bekannt:  $\lambda = 1$ .

*Teschl S. 394 "Satz 14.16 Eine Markov-Matrix hat immer den Eigenwert eins und es gibt dazu immer einen Eigenvektor, dessen Komponenten alle nichtnegativ sind."*

Für 3,3-Matrizen lässt sich das direkt ausrechnen, etwa mit SARRUS-Regel:

$$S - E = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ 1 - s_{11} - s_{21} & 1 - s_{12} - s_{22} & 1 - s_{13} - s_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} s_{11} - 1 & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} - 1 & s_{23} \\ 1 - s_{11} - s_{21} & 1 - s_{12} - s_{22} & -s_{13} - s_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} - 1 & s_{21} \\ s_{21} & s_{22} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (s_{11} - 1)(s_{22} - 1)(-s_{13} - s_{23}) + s_{12}s_{23}(1 - s_{11} - s_{21}) + \dots$$

$$= 0$$

[MARKOW, Andrei A., St. Petersburg 1916]

### Aufgabe MARKOW

Gegeben: eine stochastische Übergangsmatrix  $S^{3,3}$ , eine Anfangsverteilung  $v_0$ ,  
Zwischenlösungen, insbesondere Potenzen von  $S$ .

- Gesucht:
1. Die Grenzverteilung in Prozent und evtl. in Stückzahlen.
  2. Das charakteristische Polynom von  $S$ .
  3. Die Eigenwerte von  $S$  und die Spektralmatrix  $D$ .
  4. Die Eigenvektoren und die Transformationsmatrix von  $S$ ,
  5. Die Verteilung  $v_k$  nach  $k$  Perioden

- Schritte:
1. Zunächst die Matrix  $S - E$  formulieren  
Mit  $\lambda = 1$  das unterbestimmte lineare Gleichungssystem lösen,  
dann den Eigenvektor für Prozentsätze und/oder Stückzahlen normieren
  2. Mit SARRUS-Regel die Determinante von  $S - E$  bestimmen.
  3.  $\lambda_1 = 1$ . Polynomdivision mit  $(\lambda - 1)$ , dann lösen der quadratischen Gleichung.  
Formulieren der Diagonalmatrix  $D$ .
  4. Mit  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  die unterbestimmten linearen Gleichungssysteme lösen,  
Die Transformationsmatrix  $U$  formulieren.
  5.  $v_k = S^k v_0$ ,  $S^k$  durch wiederholtes Quadrieren



**2.6 VOLLSTÄNDIGE EIGENWERTAUFGABE**

Bei der Lösung der vollständigen Eigenwertaufgabe, wie sie in Beispiel 2.1 für eine Matrix  $A^{3,3}$  durchgeführt wurde, erkennen wir folgende Probleme:

- I. Das **charakteristische Polynom** ist über eine Determinante zu berechnen, bei  $A^{3,3}$  nehmen wir das SARRUS-Verfahren, für große Matrizen ist das viel aufwendiger.
- II. Die **Bestimmung der Eigenwerte**, d.h. die Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms, erfordert schon ab  $n = 3$  ein Iterationsverfahren. Die Nullstellenberechnung mit dem NEWTON-Iteration führt zu Näherungswerten. Mit diesen Näherungswerten muss man dann die homogenen linearen Gleichungssysteme lösen, was zu unangenehmen Rundungsfehlern führt.
- III. Um die **Eigenvektoren** zu berechnen sind lineare Gleichungssysteme mit singulärer Koeffizientenmatrix zu lösen, das ist für größere  $n$  sehr aufwendig.

Für die Probleme **I und III** hat **FADDEJEW Verfahren** entwickelt, die numerisch stabil und leicht programmierbar sind. Die rechnerischen Grundlagen haben wir schon bei der Berechnung der inversen Matrix nach FADDEJEW kennen gelernt (Abschnitt 1.10).

**I. Für das charakteristische Polynom**  $y(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + q_{n-1} \lambda^{n-1} + q_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + q_1 \lambda + q_0$   
 schreiben wir andere Koeffizienten:  $y(\lambda) = (-1)^{n+1} [-\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n]$   
 aufsteigende Indizierung:  $c_0 = -1, c_1 = \text{spur } A_1, c_2 = (\text{spur } A_2) / 2, \dots$   
 speziell für  $n = 3$ :  $y(\lambda) = -\lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3$

darin gilt für die Koeffizienten  $c_i$  wieder wie beim Invertieren von Matrizen (1.10)

$$c_i = \frac{\text{spur } A_i}{i} \quad \text{mit } A_i = A \cdot H_{i-1} \quad \text{und } H_i = A_i - c_i E$$

$A^{-1} = \frac{1}{c_n} \cdot H_{n-1}$		$\det A = (-1)^{n+1} c_n$		
mit	$A_1 = A$	$H_1 = A_1 - c_1 \cdot E$	$H_2 = A_2 - c_2 \cdot E$	$\dots$
	$c_1 = \frac{\text{spur } A_1}{1}$	$A_2 = A \cdot H_1$	$A_3 = A \cdot H_2$	$\dots$
	$c_2 = \frac{\text{spur } A_2}{2}$	$c_3 = \frac{\text{spur } A_3}{3}$	$\dots$	$H_n = O_{(n,n)}$

→ Excel / FADDEJEW

## 2.7 TEIL III, MATRIX DER EIGENVEKTOREN $U$

### III. Für die Eigenvektoren:

Wir setzen voraus, dass die Eigenwerte  $\lambda_k$  bereits berechnet sind.

Die Eigengleichung  $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$  führt zum linearen Gleichungssystem  $(A - \lambda E) \mathbf{x} = \mathbf{o}$ .

Die nicht-trivialen Lösungsvektoren  $\mathbf{x}$  nennt man Eigenvektoren.

Wir verwenden ab jetzt für Eigenvektoren das Symbol  $\mathbf{u}$ .

Für den Eigenvektor zum  $k$ -ten Eigenwert  $\lambda_k$  schreiben wir  $\mathbf{u}_k$ .

Schreibt man die Eigenvektoren  $\mathbf{u}_k$  als Spalten einer Matrix, dann ergibt sich Matrix  $U$ .

Weiter Beispiel 2.1  $\lambda_1 = -2$   $\rho$   $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\rho$   $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Für  $U$  gilt:

- die Spalten sind vertauschbar (die  $\lambda_k$  sind nicht sortiert)
- für die  $\mathbf{u}_k$  kann man auch beliebige Vielfache  $t \cdot \mathbf{u}_k$  verwenden
- die Spaltenvektoren  $\mathbf{u}_k$  sind linear unabhängig

FADDEJEW hat gezeigt, dass sich die Matrix  $U$  aus den Hilfsmatrizen  $H_i$  bestimmen lässt:

$$U = \lambda_k^{n-1} E + \lambda_k^{n-2} H_1 + \lambda_k^{n-3} H_2 + \dots + H_{n-1}$$

speziell für  $n = 3$ :

$$U = \lambda_k^2 E + \lambda_k H_1 + H_2$$

Die Komponenten der Vektoren  $\mathbf{u}_k$  sind einfach die **Linearkombinationen** der Elemente der gleichnamigen Spalten der Matrizen  $E$  bzw.  $H_i$ .

Dabei genügt es, mit jeweils denselben gleichnamigen Spalten zu rechnen.

Zum Beispiel für  $n = 4$  und für die ersten Spalten  $\mathbf{u}_{k,1}$ :

$$\mathbf{u}_{k,1} = \lambda_k^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_k^2 \begin{pmatrix} h_{111} & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{112} & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{113} & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{114} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \lambda_k \begin{pmatrix} h_{211} & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{212} & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{213} & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{214} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{311} & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{312} & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{313} & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{314} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{k,1} = \lambda_k^3 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_k^2 \cdot \mathbf{h}_{1,1} + \lambda_k \cdot \mathbf{h}_{2,1} + \mathbf{h}_{3,1} \quad \text{"h}_{2,1}" \text{ bedeutet Matrix } H_2, \text{ Spalte 1}$$

mit dem HORNER-Schema wird daraus:  $\mathbf{u}_k = ((\mathbf{e}_1 \lambda_k + \mathbf{h}_{1,1}) \lambda_k + \mathbf{h}_{2,1}) \lambda_k + \mathbf{h}_{3,1}$

→ Excel / FADDEJEW

### Bemerkungen:

Um nicht-triviale Lösungsvektoren zu  $(A - \lambda_k E) \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$  zu erhalten,

muss entsprechend der CRAMER-Regel gelten  $x_j = \frac{\det M_j}{\det M} = 0$

- Durch Rundungsfehler kann es zu unerwünschten trivialen Eigenvektoren  $\mathbf{o}$  kommen; dann benutzt man andere Spalten der Matrizen  $H_i$ .
- Bei entarteten Matrizen  $H_i$  ist es möglich, dass nicht jede beliebige Spalte zur Berechnung der Eigenvektoren benutzt werden kann.



## 2.8 FADDEJEW - VERFAHREN

Weiter Beispiel 2.1

→ Excel / FADDEJEW ab Zeile 70

Aufgabe FADDEJEW

Gegeben: eine quadratische Matrix  $A^{3,3}$  oder  $A^{4,4}$ , passendes Formular, Eigenwerte  $\lambda_k$

Gesucht: **Charakteristisches Polynom  $y(\lambda)$ , Eigenvektoren  $x_{\lambda}$ ,**

Eigenvektoren in normierter Form

(Inverse Matrix  $A^{-1}$ , Determinante  $\det A$ )

- Schritte:
1. Schema zum Berechnen der  $A_i$ , der Hilfsmatrizen  $H_i$ , der Koeffizienten  $c_i$ .
  2. Die Koeffizienten  $c_i$  ermitteln, charakteristisches Polynom formulieren.
  3. Evtl. Inverse Matrix  $A^{-1}$ , Determinante  $\det A$  wie Aufgabe Inverse
  4. Schema zum Berechnen der Eigenvektoren: jeweils die 1. Spalten markieren oder noch einmal anschreiben

5. Eigenvektoren bestimmen

$$\text{mit } \mathbf{u}_{k,1} = \lambda_k^3 \mathbf{e}_1 + \lambda_k^2 \mathbf{h}_{1,1} + \lambda_k \mathbf{h}_{2,1} + \mathbf{h}_{3,1}$$

" $\mathbf{h}_{2,1}$ " bedeutet Matrix  $H_2$ , Spalte 1

oder zeilenweise mit HORNER-Schema :  $\mathbf{u}_k = ((\mathbf{e}_1 \lambda_k + \mathbf{h}_{1,1}) \lambda_k + \mathbf{h}_{2,1}) \lambda_k + \mathbf{h}_{3,1}$

6. Die Eigenvektoren normieren je nach Aufgabenstellung
  - a) 1. Komponente = 1 oder
  - b) Länge = 1 oder
  - c) in Prozentanteilen
  - d) ganzzahlig

## 2.9 NEWTON-ITERATION

### Wiederholung aus Abschnitt 2.1:

Die Eigengleichung  $A \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$  führt auf das lineare Gleichungssystem  $(A - \lambda E) \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , das nicht-trivial lösbar ist, wenn  $\det(A - \lambda E) = 0$ .

Der Ausdruck  $\det(A - \lambda E)$  ist das charakteristische Polynom  $y(\lambda)$  der Matrix  $A$ .

Die Nullstellen von  $y(\lambda)$  sind die Eigenwerte der Matrix.

Die vollständige Eigenwert-Aufgabe besteht aus drei Teilen:

I. Bestimmung des charakteristischen Polynoms.

II. Berechnung der Eigenwerte, d.h. der Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

III. Ermittlung der Eigenvektoren.

Teile I und III lösen wir mit dem FADDEJEW-Verfahren. Problem II steht noch aus.

Für die Berechnung der Eigenwerte verwendet man iterative Verfahren.

Wir betrachten wieder nur reelle, einfache Nullstellen, weder komplexe noch mehrfache.

Wir setzen das charakteristische Polynom als gegeben voraus.

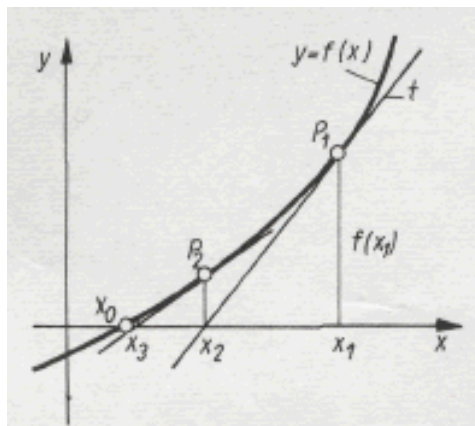
Je diagonal-dominanter eine Matrix ist, desto leichter ist die Bestimmung der Eigenwerte.

Es gibt auch Verfahren, um Matrizen möglichst diagonal-dominant zu machen.

Mit dem bekannten NEWTON-Iterationsverfahren bestimmt man Nullstellen iterativ.

Man kann es bei Matrizen mit  $n < 200$  zur Berechnung der Eigenwerte verwenden.

[NEWTON, Isaac, Cambridge(GB) 1669]



Im Steigungsdreieck gilt:  $m = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} = f'(x_1) \quad \parallel \cdot (x_1 - x_2), \quad : f'(x_1)$

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - x_2 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \text{allgemein: } x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$f$  und  $f'$  sind Polynome, zur Berechnung von  $f(x_k)$  und  $f'(x_k)$  verwendet man die HORNER-Schreibweise. Die HORNER-Darstellung ergibt sich durch schrittweises Ausklammern von  $x$ :

$$f(x) = ((a_n x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + \dots + a_0$$

$$\square f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 9 = ((2x + 7) \cdot x + 0) \cdot x - 9$$

Damit lassen sich Funktionswerte bequem berechnen:  $f(-2,1582) = 3,4997$

$x = -2,15872$  speichern, dann  $2 \cdot \text{Speicher} + 7 [=] \cdot \text{Speicher} \cdot \text{Speicher} - 9 [=]$

$$\square f(x) = 4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 8 = (((4x - 2) \cdot x + 6) \cdot x - 5) \cdot x + 8$$

$$f'(x) = 16x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = ((16x - 6) \cdot x + 12) \cdot x - 5$$

[Horner, William G., London 1819]

**2.10 GERSCHGORIN-KREISE**

Zum Starten des Iterationsverfahren nach NEWTON benötigen wir geeignete Startwerte  $x_1$ .

GERSCHGORIN veröffentlichte 1931 einen Satz über die Lokalisierung der Eigenwerte einer Matrix.

[GERSCHGORIN, Semjon A., St.Petersburg 1931]

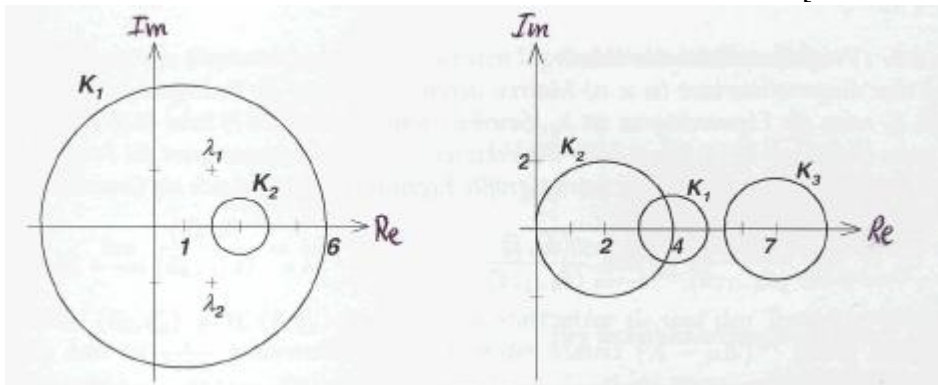
Alle Eigenwerte einer Matrix  $A = (a_{ij})$  liegen in einem Gebiet, das durch die Vereinigung

der Kreise 
$$\mathbb{K}_i = \left\{ z \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}$$
 Radien  $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$  entsteht.

$z$  ist beliebig komplex  $z \in \mathbb{C}$ , die Kreise liegen in der komplexen Zahlenebene  $Re/Im$ .

$\dots = 2 + \sqrt{-4} = 2 + 2i$

[nach Bärwolff S.64f]



$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $K_1 = \{z \mid  z - 1  \leq 5\}$ $K_2 = \{z \mid  z - 3  \leq 1\}$ $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i \quad i = \sqrt{-1}$ $\lambda_{1,2} \text{ liegen in } K_1 \cup K_2 = K_1$	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0,5 & 7 \end{pmatrix}$ $K_1 = \{z \mid  z - 4  \leq 1\}$ $K_2 = \{z \mid  z - 2  \leq 2\}$ $K_3 = \{z \mid  z - 7  \leq 1,5\}$ $\lambda_1 = 4,26. \quad \lambda_2 = 7,168. \quad \lambda_3 = 1,579$
--	--

**z.B. 3.Zeile:**  $z = 8. \Rightarrow |8-7| < 1,5$      $z = 9 \Rightarrow |9-7| < 1,5$      $z = 6 \Rightarrow |6-7| < 1,5. \quad 5,5 \dots 8,5$

Bei der Konstruktion der GERSCHGORIN-Kreise erkennt man, dass die Lokalisierung der Eigenwerte umso besser gelingt, je diagonal-dominanter die Matrix ist.

Unter unseren Voraussetzungen "nur reelle, einfache Nullstellen, weder komplexe noch mehrfache" kann die Lokalisierung sehr vereinfacht werden:

$$\lambda_i \in \left[ a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right] \Rightarrow \lambda_i \in [a_{ii} - r_i; a_{ii} + r_i]$$

Die Diagonal-Elemente  $a_{ii}$  benutzen wir als Startstellen  $x_i = a_{ii}$

## 2.11 EIGENWERTE

### Beispiel 2.3 Berechnung der Eigenwerte

Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0,5 & 7 \end{pmatrix}$  hat das charakteristische Polynom  $y = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 48,5\lambda + 48$

Die Berechnung erfolgte mit dem FADDEJEW-Verfahren aus Abschnitt 2.4.

Es sollen die Eigenwerte auf 3 Nachkommastellen bestimmt werden mit Hilfe der GERSCHGORIN-Kreise, der HORNER-Schreibweise und der NEWTON-Iteration.

$$f(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 48,5\lambda + 48 = ((-\lambda + 13)\lambda - 48,5)\lambda + 48$$

$$f'(\lambda) = -3\lambda^2 + 26\lambda - 48,5 = (-3\lambda + 26)\lambda - 48,5$$

→ Excel / Eigenwerte

### Aufgabe Eigenwerte

Gegeben: Matrix  $A$ , Charakteristisches Polynom  $f(\lambda)$

Gesucht: GERSCHGORIN-Kreise (Ungleichungen, Skizzen), HORNER-Schreibweise, Eigenwerte  $\lambda_i$  auf 3 Nachkommastellen genau mit Hilfe der NEWTON-Iteration.

- Schritte:
1.  $K_i = \left\{ z \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}$  in dieser Form angeben
  2.  $f'(\lambda)$  bilden, HORNER-Schreibweise für  $f(\lambda)$  und  $f'(\lambda)$   
Man kann auch durchweg "x" schreiben statt "λ".
  3. Arbeitstabelle zur Durchführung der NEWTON-Iteration erstellen.
  4.  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  bzw.  $\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{y(\lambda_k)}{y'(\lambda_k)}$

## 2.12 LR-RL-VERFAHREN

Bei der Berechnung der Eigenwerte mit den Verfahren nach NEWTON-GESCHGORIN-HORNER ergeben sich Rundungsfehler auf dreierlei Weise,

- (1) bei der Erstellung des charakteristischen Polynoms
- (2) bei der NEWTON-Iteration
- (3) bei der Bestimmung der Eigenvektoren

Verfahren, die direkt mit Matrizen-Transformationen zu den Eigenwerten führen vermeiden dies.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transformation}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdots \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = D$$

Es gibt Verfahren, die nur den betragsgrößten oder nur den betragskleinsten Eigenwert bestimmen.

Diese Eigenwerte sind für eine Reihe von Anwendungen interessant.

Es gibt Spezialverfahren für dünn-besetzte Matrizen und für symmetrische Matrizen und natürlich für diagonal-dominante Matrizen.

**Es gibt Verfahren, die sämtliche Eigenwerte beliebiger Matrizen ermitteln.**

Sie sind zu aufwendig, um sie manuell durchzuführen.

RUTISHAUSER hatte 1958 die Idee, die Matrizen  $L$  und  $R$  einer regulären Matrix in umgekehrter Reihenfolge miteinander zu multiplizieren und dies immer weiter zu wiederholen:

$A_1$  –Zerlegung in  $L_1, R_1$  dann Multiplikation  $R_1 \cdot L_1 = A_2$

$A_2$  –Zerlegung in  $L_2, R_2$  dann Multiplikation  $R_2 \cdot L_2 = A_3$

...

$A_k$  –Zerlegung in  $L_k, R_k$  dann Multiplikation  $R_k \cdot L_k = A_{k+1}$

Wir nennen deshalb das Verfahren deshalb LR-RL-Verfahren.

[RUTISHAUSER, Heinz, Zürich 1958, ALGOL]

Nach  $k$  Wiederholungen zeigt sich:

1. Die Matrizen  $L_k$  konvergieren gegen die Einheitsmatrix  $E$ .
2. Die Matrizen  $A_k$  konvergieren gegen eine Matrix, deren Hauptdiagonalen die Eigenwerte enthält, sogar betragsmäßig geordnet.
3. Die Eigenwerte in der Hauptdiagonalen sind größenmäßig geordnet.

Das LR-RL-Verfahren führt zu den Eigenwerten unter vier starken Voraussetzungen:

- a) Ein Zeilentausch ist nicht erlaubt (d.h. Pivot-Elemente dürfen nicht null sein). Die LR-Zerlegungen müssen also ohne Zeilentausch durchführbar sein.
- b) Unter den Eigenwerten dürfen keine betragsgleiche sein.
- c) Es dürfen keine komplexen Eigenwerte vorkommen.
- d) Die Rundungsfehler bei den Matrizenmultiplikationen müssen erträglich sein.

### Beispiel 2.4

Die oben genannten Voraussetzungen seien erfüllt.

Zur Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  sind die Eigenwerte mit dem LR-RL-Verfahren zu bestimmen.

Zum Vergleich:

Die auf 2 Nachkommastellen exakten Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 2,90$ .  $\lambda_2 = -1,71$ .  $\lambda_3 = 0,81$ .

→ Excel / LR-RL

## 2.13 QR-RQ-VERFAHREN

Die oben genannten Nachteile des LR-RL-Verfahrens hat das QR-RQ-Verfahren nicht. Die Matrix  $A$  wird in eine Matrix  $Q$  und eine rechte Dreiecksmatrix  $R$  zerlegt.  $A = QR$  dann werden Matrizen  $Q$  und  $R$  in umgekehrter Reihenfolge miteinander multipliziert analog dem LR-RL-Verfahren

$A_1$ -Zerlegung in  $Q_1, R_1$  dann Multiplikation  $R_1 \cdot Q_1 = A_2$

$A_2$ -Zerlegung in  $Q_2, R_2$  dann Multiplikation  $R_2 \cdot Q_2 = A_3$

...

$A_k$ -Zerlegung in  $Q_k, R_k$  dann Multiplikation  $R_k \cdot Q_k = A_{k+1}$

Diese Zerlegung gelingt für praktisch alle Matrizen, sogar für nicht-quadratische, unter zusätzlichen Bedingungen auch für komplexe Matrizen.

Es gilt dann für  $|s,1| > |s,2| > \dots > |s,n|$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Die Matrizen  $A_i$  konvergieren gegen eine rechte Dreiecksmatrix mit den Eigenvektoren in der Hauptdiagonalen.

Das Verfahren wurde in der ursprünglichen Form von RUTISHAUSER entwickelt, hat aber inzwischen viele Verbesserungen erfahren.

Die Matrix  $Q$  ist eine orthogonale Matrix, d.h.  $Q^{-1} = Q^T$ .

Wenn die Spaltenvektoren  $q_k$  einer Matrix  $Q$  eine orthonormale Basis bilden,

handelt es sich um einer orthogonalen Matrix, z.B.  $Q = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Die Skalarprodukte  $q_1 q_2 = 0$ ,  $q_2 q_3 = 0$ ,  $q_1 q_3 = 0$ , Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Die Rechenschritte lassen sich kurz skizzieren:

1. Zunächst bringt man Matrix  $A$  auf HESSENBERG-Form, damit die  $QR$ -Zerlegungen und die Matrizenmultiplikationen numerisch stabiler erfolgen.

Eine HESSENBERG-Matrix ist eine rechte Dreiecksmatrix, die unter der Hauptdiagonalen

nur eine Subdiagonale und sonst nur Null-Elemente hat. z.B.  $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Das gelingt mit einer Transformation  $H = Q^T A Q$

2. Zunächst werden symmetrische, orthogonale Hilfsmatrizen (HOUSEHOLDER-Matrizen) sukzessiv von links multipliziert:  $\underbrace{H_q H_{q-1} \dots H_2 H_1}_{H} A_1 = HA = R \quad A_1 = HA = R$

Das ist die HOUSEHOLDER-Transformation

3. Mit  $Q = H^T$  ergibt sich die Zerlegung  $A = H^T R = QR$

4. Damit führt man die Folge der Multiplikationen und Zerlegungen durch

$A_1$  zerlegen in  $Q, R$

Multiplikation  $R Q = A_2$

$A_2$  zerlegen  $A_2 = Q_2 R_2$  usw.

**2.14 ANWENDUNGSBEISPIELE**

1. Der 2-Massen-Schwinger

Engeln-Müllges S.285 ff

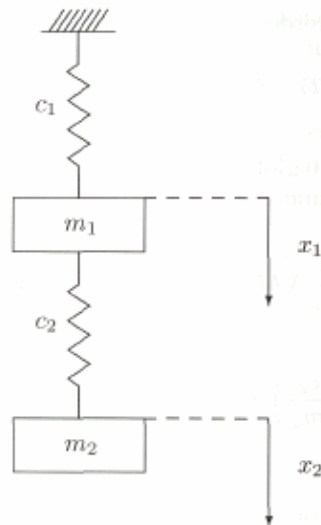


Abb. 7.1. Zweimassenschwinger

Bei Auslenkung einer oder beider Massen treten gekoppelte Schwingungen auf. Wird z.B. nur  $m_2$  ausgelenkt, so wandert die Energie der Masse  $m_2$  auf  $m_1$ , von dort allmählich wieder auf  $m_2$  etc.

$$(m_{ij}) \cdot y'' + (c_{ij}) \cdot y = 0$$

Die Differentialgleichungen für die ungedämpfte Bewegung lauten:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. abgekürzt mit den beiden (2,2)-Matrizen  $M$  und  $C$  und den Vektoren  $x$  und  $\ddot{x}$

$$M \ddot{x} + C x = 0$$

Dies führt auf das Gleichungssystem  $(C - \lambda M) \cdot x(t) = 0$  mit den Eigenwerten  $\lambda_i$ .  $c_i$  sind Federkonstanten

Die Schwingung wird beschrieben mit:  $x(t) = a \sin(\hat{A}_1 t) + b \sin(\hat{A}_2 t)$

2. Ein Beispiel für ein lineares Differentialgleichungssystem

Bärwolff, S. 60

$$\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 2y + 3z \\ z' = -x + 3y + 2z \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_3' = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x}' = A\vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Zum Lösen solcher Gleichungssysteme benutzt man Eigenwerte und Eigenvektoren.

3. SCHRÖDINGER-Gleichung (einfachster Art, für nicht-relativistische Körper, z.B. stehende Wellen)

Grundlage der Quantenmechanik.

$\psi(x)$  ist eine Wellenfunktion.  $U(x)$  sind Potentiale (el.Spannungen)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x)) \cdot \psi$$

Nur bestimmte Werte, die Eigenwerte, erfüllen die Randbedingungen, daraus ergeben sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Teilchens...