INHALT

4.1 Interpolation – Überblick

4.5 NEWTON-Interpolation:
aus n+1 Stützpunkten eine Polynomfunktion vom Grad n
Die Koeffizienten mit dividierten Differenzen rekursiv bestimmen
=> Polynomfunktion in NEWTON-Form und in HORNER-Form

4.9 Spline-Interpolation
Spline-Funktionen bestehen aus Polynomen 3.Grades,
die glatt ineinander übergehen, glatt: $f(x) = g(x)$, $f'(x) = g'(x)$, $f''(x) = g''(x)$

4.14 BÉZIER-Interpolation
Die Summanden B der Bernsteinpolynome werden mit y_i gewichtet.
Die y_i sind die y-Werte der Eckpunkte des BÉZIER-Polygons

3 "Sorten y -Werte":
1. gegebene y-Werte der Punkte des Bézier-Polygons y_0, y_1, y_2, y_3.
2. rekursiv berechnete Zwischen-Interpolationswerte y_{01}, y_{12}, y_{23}, … , y_{0123}.
3. Funktionswerte auf der Bézier-Kurve $f(x) = y_{0123}$. Für die gegebene x-Koordinate.

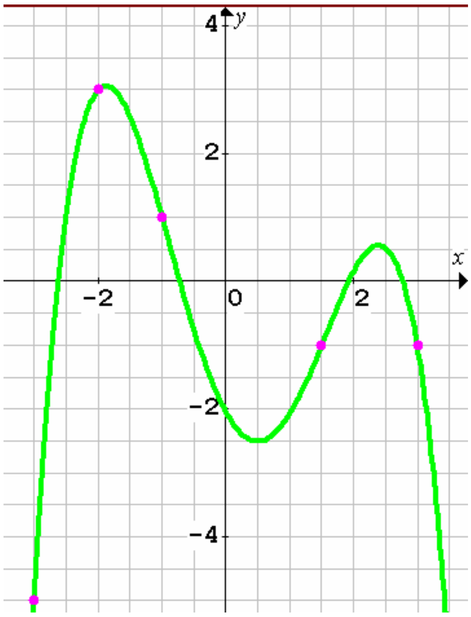
3 "Sorten x-Koordinaten":
1. immer gleiche x-Koordinaten der Punkte des Bézier-Polygons 0, 1/3, 2/3, 3/3 = 1.
2. die gegebene x-Koordinate, für die der Wert f(x) berechnet werden soll.
3. die x-Koordinaten der Zwischeninterpolationspunkte (Interpolationsstrecken).

4.20 Regressionsfunktionen mit linearisierbaren Ansatzfunktionen: $y = a\ ^3(x) + b$
Die partiellen Ableitungen der Summe der Abweichungsquadrate A (a,b)
werden nullgesetzt, das Gleichungssytem liefert die Regressionskoeffizienten a und b.

4.22 Regressionsfunktionen mit der transponierten VANDERMONDE-Matrix $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{y}$
=> zwei Typen von Regressionsfunktionen
1. Regressionsfunktionen mit einer Einflussvariablen, mehr als zwei Regressionskoeffizienten
   Bivariate Regression, d.h. zwei Variable, meistens *x* und *y*.
   z.B. $y(x)=a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
2. Regressionsfunktionen mit mehreren Einflussvariablen, eine beeinflusste Variable und mehr als zwei Regressionskoeffizienten
   Multivariate Regression, d.h. mehr als zwei Variable, meistens *u, v, w, x* und *y*.
   Multiple Regression.
   z.B. $y(x)= a_0 + a_1 \cdot u^2 + a_2 \cdot v + a_3 \cdot x$

4.1 INTERPOLATION

❶ $P_0(-3|-5)$ $P_1(-1|1)$ $P_2(3|-1)$ $P_3(-2|3)$ $P_4(1{,}5|-1)$
5 Stützstellen

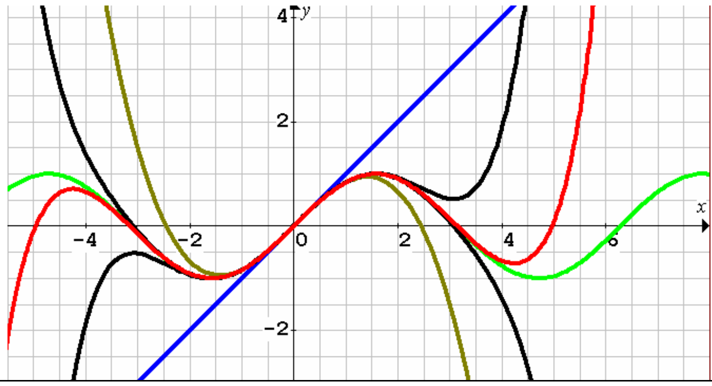


❷ Taylor-Reihe für $f(x) = \sin x$ entwickelt für $x = 0$.

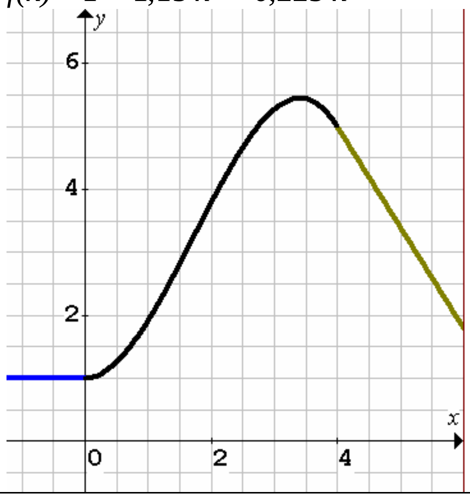
$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} =$$

$$= \left(\left(\left(\left(\frac{1}{362880}xx - \frac{1}{5040}\right)xx + \frac{1}{120}\right)xx - \frac{1}{6}\right)xx + 1\right)x$$

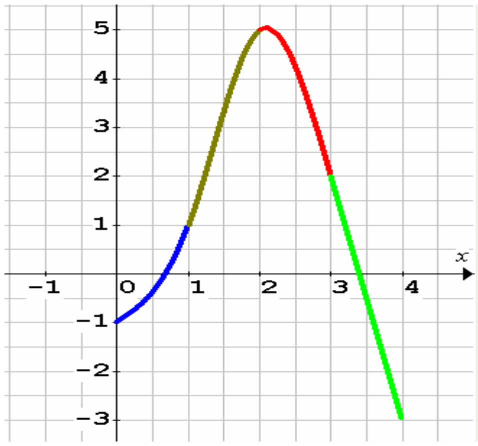
$f(2{,}3) = 0{,}7457$ $g(2{,}3) = 0{,}7459$



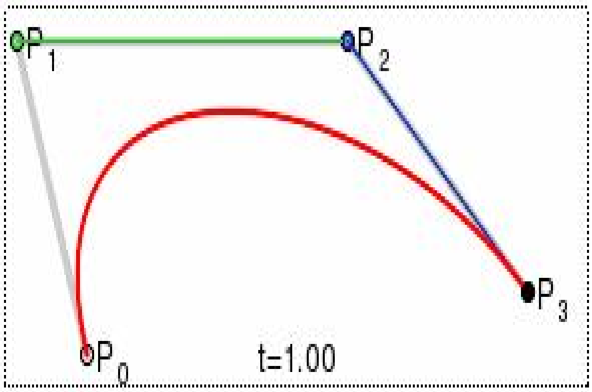
❸ Steigungswinkel 0° bei P_0 (0|1)
Steigungswinkel 122° bei P_1 (4|5)
$f(x) = 1 + 1{,}15\,x^2 - 0{,}225\,x^3$



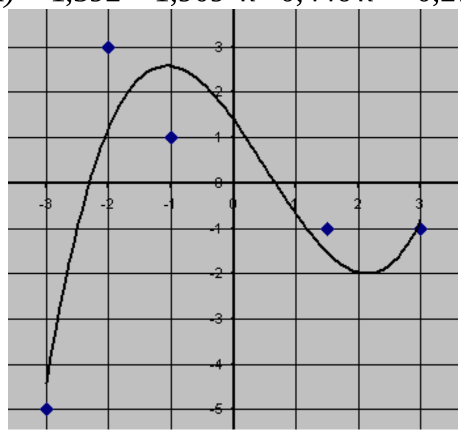
❹ kubische Splinefunktion, 5 Stützstellen $P_0 \dots P_4$
4 Teilpolynome $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$,



❺
Bézier-Polynom zum Polygon P_0, P_1, P_2, P_3



❻ Ausgleichspolynom
$f(x) = 1{,}392 - 1{,}909\ x - 0{,}446\,x^2 + 0{,}279\,x^3$



4.2 POLYNOME

Polynomfunktionen sind besonders handliche Funktionen. *Teschl S. 113*
Viele mathematische Verfahren benutzen deshalb Polynomfunktionen.
In der Haupt- bzw. Summendarstellung definiert man: (Hauptform, Hauptschreibweise)

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = \qquad a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

Eine Polynomfunktion hat den Grad n und ist durch die n+1 Koeffizienten a_i eindeutig bestimmt.
$a_0 = f(0)$ sind die y-Achsen-Abschnitte der Funktionsgraphen.

Polynomfunktionen sind überall stetig und differenzierbar.
Polynomfunktionen sind für alle reelle Zahlen definiert, D = R.
Polynome lassen sich addieren, subtrahieren, multiplizieren, mit Faktor multiplizieren, ableiten und integrieren, es entstehen dabei wieder Polynome (Abgeschlossenheit).
Die 1.Ableitung ist vom Grad n-1, die Stammfunktion ist vom Grad n+1.

Nullstellen α_i kann man bis n = 4 geschlossen berechnen;
ab n = 3 benutzt man Näherungsverfahren.
Eine Polynomfunktion hat n Nullstellen, darunter eventuell mehrfache und komplexe.
Eine Polynomfunktion hat höchstens n reelle Nullstellen.
Eine Polynomfunktion hat höchstens n-1 Extrempunkte und höchstens n-2 Wendepunkte.

Bei bekannten Nullstellen α_1, α_2, … α_n kann man die Produkt-Darstellung formulieren:

$$f(x) = c \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$$

q Nullstellen α_1 = –3. α_2 = -1,5. α_3 = 1 und y-Achsenabschnitt bei –9.

p $f(x) = c \cdot (x+3) \cdot (x+1{,}5) \cdot (x-1) = c \cdot (x^2 + 0{,}5x - 1{,}5) \cdot (x+3) = c \cdot (x^3 + 3{,}5x^2 - 4{,}5)$

da a_0 = –9 gegeben ist, folgt $c = 2$ und $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 9$

Die HORNER-Darstellung ergibt sich durch schrittweises Ausklammern von x:

$$f(x) = ((a_nx + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + \ldots + a_0$$

q $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 9 = ((2x+7) \cdot x + 0) \cdot x - 9$

Damit lassen sich Funktionswerte bequem berechnen: $f(-2{,}1582) = 3{,}4997$
x = –2,15872 speichern, dann 2 · Speicher + 7 [=]· Speicher · Speicher – 9 [=]

q $f(x) = 4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 8 = (((4x-2) \cdot x + 6) \cdot x - 5) \cdot x + 8$

$f'(x) = 16x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = ((16x - 6) \cdot x + 12) \cdot x - 5$

4.3 VANDERMONDE-MATRIX

Eine Messreihe liefert üblicherweise eine Wertetabelle, d.h. zwei Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$.
Im einfachsten Fall einer Interpolation sucht man eine Polynomfunktion $f(x)$,
die die Punkte $P_i(x_i \mid y_i)$ enthält oder für die gilt $f(x_i) = y_i$.
Die P_i nennt man Stützpunkte oder Knoten, die x_i heißen Stützstellen, die y_i heißen Stützwerte.

Eine Polynomfunktion von Grad n ist durch $n+1$ Koeffizienten a_i eindeutig bestimmt.

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Eine Polynomfunktion ist durch $n+1$ paarweise verschiedene Stützpunkte eindeutig bestimmt.
Eine Polynomfunktion ist durch $n+1$ unabhängige Informationen bestimmt.

Kennt man $n+1$ Stützpunkte $(x_i \mid y_i)$ dann lassen sich die Koeffizienten a_i mit dem folgenden linearen Gleichungssystem bestimmen:

$$\begin{matrix} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$$

Die Matrix $\boldsymbol{V}$ nennt man VANDERMONDE-Matrix.
[Vandermonde, Alexandre-Théophile, Paris, 1772]

Beisp. 4.1 siehe Grafik Abschnitt 4.1 ❶
Es ist eine Polynomfunktion gesucht, die die folgende fünf Stützpunkte enthält:
$P_0(-3|-5)$ $P_1(-1|1)$ $P_2(3|-1)$ $P_3(-2|3)$ $P_4(1{,}5|-1)$
Das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Va} = \boldsymbol{y}$ führt zu den fünf Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_4$

$$\begin{matrix} a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 + 81a_4 = -5 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 1 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = -1 \\ a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + 16a_4 = 3 \\ a_0 + 1{,}5a_1 + 2{,}25a_2 + 3{,}375a_3 + 5{,}0625a_4 = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = -2{,}052 \\ a_1 = -1{,}812 \\ a_2 = 1{,}719 \\ a_3 = 0{,}275 \\ a_4 = -0{,}203 \end{matrix}$$

und damit zur Funktionsgleichung $f(x) = -2{,}052 - 1{,}812\,x + 1{,}719\,x^2 + 0{,}275\,x^3 - 0{,}203\,x^4$.

Die Berechnung der Interpolations-Polynome mit Hilfe der VANDERMONDE-Matrix hat zwei Nachteile:

(1) Die Lösung des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Va} = \boldsymbol{y}$ enthält Rundungsfehler.
(2) Wenn ein weiterer Stützpunkt bekannt wird, muss das ganze lineare Gleichungssystem neu berechnet werden.

Deshalb benutzt man in der Praxis andere Interpolationsverfahren.

4.4 NEWTON-POLYNOME

NEWTON, Isaac, Cambridge GB, 1670]

Die NEWTON-Form der Polynomfunktionen ist

$$y(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

Es seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützpunkte $P_i\,(x_i \mid y_i)$ gegeben, in beliebiger Reihenfolge d.h. es ist nicht erforderlich, dass $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Die Polynomfunktion wird schrittweise, Punkt für Punkt, aufgebaut.

Zunächst betrachten wir den Punkt $(x_0 \mid y_0)$. Eine Funktion, die eine Parallele zur x-Achse darstellt, also $f_0 = f(x_0) = y_0$, ist dann die einfachste interpolierende Funktion.

Wir führen noch das Symbol c für Newtonkoeffizienten ein, zunächst c_0 mit $f(x_0) = y_0 = c_0$.

Schritt $x = x_0$: $y_0 = c_0$

Jetzt nehmen wir den Punkt $(x_1 \mid y_1)$ hinzu. Die interpolierende Funktion soll nun zusätzlich durch den Punkt $(x_1 \mid y_1)$ führen. Sie ist vom Grad 1, es ist die Gerade f_1 durch P_0 und P_1.

Dazu addiert man den Term $(x_1 - x_0)$ und hält damit den Funktionswert für x_0 konstant.

Damit aber die Funktion f_1 wirklich durch den Punkt $(x_1 \mid y_1)$ geht, addiert man das c_1-fache von $(x_1 - x_0)$ zu f_0.

Die NEWTON-Konstante c_1 ist noch nicht bekannt, sie muss noch bestimmt werden:

Schritt $x = x_1$: $y_1 = c_0 + c_1\,(x_1 - x_0) = y_0 + c_1\,(x_1 - x_0)$ p $c_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = m$ => c_1

Nun nehmen wir den dritten Punkt $(x_2 \mid y_2)$ hinzu. Die interpolierende Funktion ist vom Grad 2, es ist eine Parabel, die durch die drei Punkte P_0, P_1, P_2 verläuft. Um sicherzustellen, dass sich die Funktionswerte bei x_0 und x_1 nicht ändern und trotzdem f_2 durch $(x_2 \mid y_2)$ geht, addieren wir das c_2-fache von $(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

Schritt $x = x_2$:

$$y_2 = y_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$y_2 - y_0 = c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \| : (x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + c_2\left(x_2 - x_1\right) \Rightarrow c_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} \quad 2$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Stützstellen x_i kann man $P_0\,(x_0 \mid y_0)$ mit $P_1\,(x_1 \mid y_1)$ vertauschen

$$y_2 - y_0 = c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \| : (x_2 - x_0)$$

$$y_2 - y_1 = c_1(x_2 - x_1) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \| : (x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + c_2\left(x_2 - x_0\right) \Rightarrow c_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \quad 3$$

Der Ausdruck 3 für c_2 ist übersichtlicher als der Ausdruck 2.

Mit der Hinzunahme des vierten Punktes $(x_3 \mid y_3)$ ergibt sich analog

Schritt $x = x_3$: $y_3 = y_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

$$c_3 = \frac{\dfrac{\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} - \dfrac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0}$$

4.5 NEWTON-INTERPOLATION

Die Entwicklung der Interpolationspolynome zeigt:

1. Die NEWTON-Form der Polynomfunktionen ist
   $y(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$
2. Die NEWTON-Koeffizienten c_i können rekursiv berechnet werden aus
   $y_0 = c_0$
   $y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$
   $y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$
   $y_3 = c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ usw.
3. Die NEWTON-Koeffizienten c_i sind dividierte Differenzen

Dividierte Differenzen sind weiterentwickelte Steigungsterme mit einer eigenen Symbolik:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{kürzt man ab mit} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = [x_2 x_1] = d_{21}$$

Damit lassen sich die NEWTON-Koeffizienten c_i schreiben:

$$c_0 = y_0$$

$$c_1 = [x_1 x_0] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$c_2 = [x_2 x_1 x_0] = \frac{[x_2 x_1] - [x_1 x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$c_3 = [x_3 x_2 x_1 x_0] = \frac{[x_3 x_2 x_1] - [x_2 x_1 x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} - \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0}$$

usw.

Allgemein gilt für dividierte Differenzen, worin die Argumente x_k, x_i, x_h usw. vertauschbar sind.

$$[x_k x_i] = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}, \qquad [x_k x_i x_h] = \frac{[x_k x_i] - [x_i x_h]}{x_k - x_h} \quad \text{usw.}$$

Die NEWTON-Koeffizienten c_i sind dividierte Differenzen, die man rekursiv entwickeln kann.
Man kann die jeweils berechneten dividierten Differenzen benutzen, um die nächste zu bestimmen.
In einem Rechenschema lassen sich die c_i systematisch ermitteln:

i	x_i	y_i				
0	x_0	$y_0 = c_0$				
			$[x_1 x_0] = c_1$			
1	x_1	y_1		$[x_2 x_1 x_0] = c_2$		
			$[x_2 x_1]$		$[x_3 x_2 x_1 x_0] = c_3$	$\cdots$
			$\vdots$		$\vdots$	
2	x_2	y_2		$[x_3 x_2 x_1]$		
			$[x_3 x_2]$			
3	x_3	y_3				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Interpolationsschema nach NEWTON

4.6 INTERPOLATIONS-RECHNUNG

Beisp. 4.2 Interpolation nach NEWTON [nach *Engeln-Müllges S.364*]

Wertetabelle

i	x_i	y_i
	0	–3
	1	1
	2	2
	4	7

$c_0 = y_0 = -3$

$y_1 = c_0 + c_1\,(x_1 - x_0)$ p $1 = -3 + c_1(1-0)$ p $c_1 = 4$

$y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

p $2 = -3 + 4(2\text{-}0) + c_2(2\text{-}0)(2\text{-}1)$ p $-3 = 2\,c_2$ p $c_2 = -1{,}5$

$y_3 = c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

p $7 = -3 + 4(4\text{-}0) - 1{,}5(4\text{-}0)(4\text{-}1) + c_3(4\text{-}0)(4\text{-}1)(4\text{-}2)$

p $7+3-16+18 = 24\,c_3$ p $12 = 24\,c_3$ p $c_3 = 0{,}5$

Diese Rechnungen sind mit dem Interpolationsschema viel einfacher durchführbar:

i	x_i	y_i			
0	0	$-3 = c_0$			
			$\frac{1-(-3)}{1-0} = 4 = c_1$		
1	1	1		$\frac{1-4}{2-0} = -1{,}5 = c_2$	
			$\frac{2-1}{2-1} = 1$		$\frac{0{,}5-(-1{,}5)}{4-0} = 0{,}5 = c_3$
2	2	2		$\frac{2{,}5-1}{4-1} = 0{,}5$	
			$\frac{7-2}{4-2} = 2{,}5$		
3	4	7			

Das Interpolationspolynom hat die Gleichung

$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$

$f(x) = -3 + 4(x - 0) - 1{,}5(x - 0)(x - 1) + 0{,}5(x - 0)(x - 1)(x - 2)$ (NEWTON-Form)

$= -3 + 4\,x - 1{,}5\,x\,(x - 1) + 0{,}5\,x\,(x^2 - 3x + 2)$

$= -3 + 4\,x - 1{,}5\,x^2 + 1{,}5\,x + 0{,}5\,x^3 - 1{,}5\,x^2 + x$

$= 0{,}5\,x^3 - 3\,x^2 + 6{,}5\,x - 3$ (Normalform, Hauptform)

$= ((0{,}5\,x - 3)\,x + 6{,}5)\,x - 3$ (HORNER-Form)

→ *Excel / Interpolation*

Zum Auswerten (und Zeichnen) der Polynomfunktion muss man natürlich nicht erst die NEWTON-Form in die Normalform und dann in die HORNER-Form umwandeln.

Man entwickelt die NEWTON-Form entsprechend der absteigenden Potenzen direkt in die HORNER-Form durch schrittweises Ausklammern der Ausdrücke $x - x_i$.

Die Klammerausdrücke $x - x_i$ speichert man in einer eigenen Spalte.

$= -3 + 4(x - 0) - 1{,}5(x - 0)(x - 1) + 0{,}5(x - 0)(x - 1)(x - 2)$

$= + 0{,}5(x - 0)(x - 1)(x - 2) - 1{,}5(x - 0)(x - 1) + 4(x - 0) - 3$

$= 0{,}5\,u\,v\,w - 1{,}5\,u\,v + 4\,u - 3$

$= ((0{,}5\,w - 1{,}5)\,v + 4)u - 3$

$= ((0{,}5\,(x - 2) - 1{,}5)\cdot(x - 1) + 4)\cdot(x - 0) - 3$

$f(x) = ((0{,}5\,(x - 2) - 1{,}5)\cdot(x - 1) + 4)\cdot(x - 0) - 3$

allgemein ergibt sich als HORNER-Form:

$$f(x) = \Big(\Big(\big(c_n\,(x - x_{n-1}) + c_{n-1}\big)(x - x_{n-2}) + \ldots c_2\Big)(x - x_1) + c_1\Big)(x - x_0) + c_0$$

4.7 INTERPOLATIONS-AUFGABE

Beisp. 4.3 Ein weiterer Stützpunkt kommt hinzu

Wird ein weiteres Messergebnis bekannt, etwa P_4 (1,5 | 3), fügt man einfach ein Zeile hinzu.

→ *Excel / Interpolation*

i	x_i	y_i				
0	0	$-3 = c_0$				
			$4 = c_1$			
1	1	1		$-1{,}5 = c_2$		
			1		$0{,}5 = c_3$	
2	2	2		0,5		$1{,}4 = c_4$
			2,5		2,6	
3	4	7		1,8		
			1,6			
4	1,5	3				

und erhält für

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$f(x) = -3 + 4(x - 0) - 1{,}5\,(x - 0)(x - 1) + 0{,}5\,(x - 0)(x - 1)(x - 2) + 1{,}4(x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 4)$$

sowie die HORNER-Form und die Normalform:

$$f(x) = \Big(\big(\big(1{,}4(x-4)+0{,}5\big)\cdot(x-2)-1{,}5\big)\cdot(x-1)+4\Big)\cdot(x-0)-3$$

$$f(x) = 0{,}5\,x^3 - 3\,x^2 + 6{,}5\,x - 3 \qquad +1{,}4x(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$f(x) = 0{,}5\,x^3 - 3\,x^2 + 6{,}5\,x - 3 \qquad +(1{,}4x^2 - 1{,}4x)(x^2 - 6x + 8)$$

$$f(x) = 0{,}5\,x^3 - 3\,x^2 + 6{,}5\,x - 3 \qquad +1{,}4x^4 - 8{,}4x^3 + 11{,}2x^2 - 1{,}4x^3 + 8{,}4x^2 + 11{,}2x$$

$$f(x) = 1{,}4x^4 - 9{,}3x^3 + 16{,}6x^2 + 17{,}7x - 3$$

Aufgabe Interpolation

Gegeben: 4 bis 5 Stützpunkte, 1 bis 2 zusätzliche Argumente x

Gesucht: Interpolierendes Polynom in NEWTON-, HORNER- und Hauptform
Auswertung der Funktionsgleichung $f(x)$ für ein bis zwei Argumente x

Schritte:

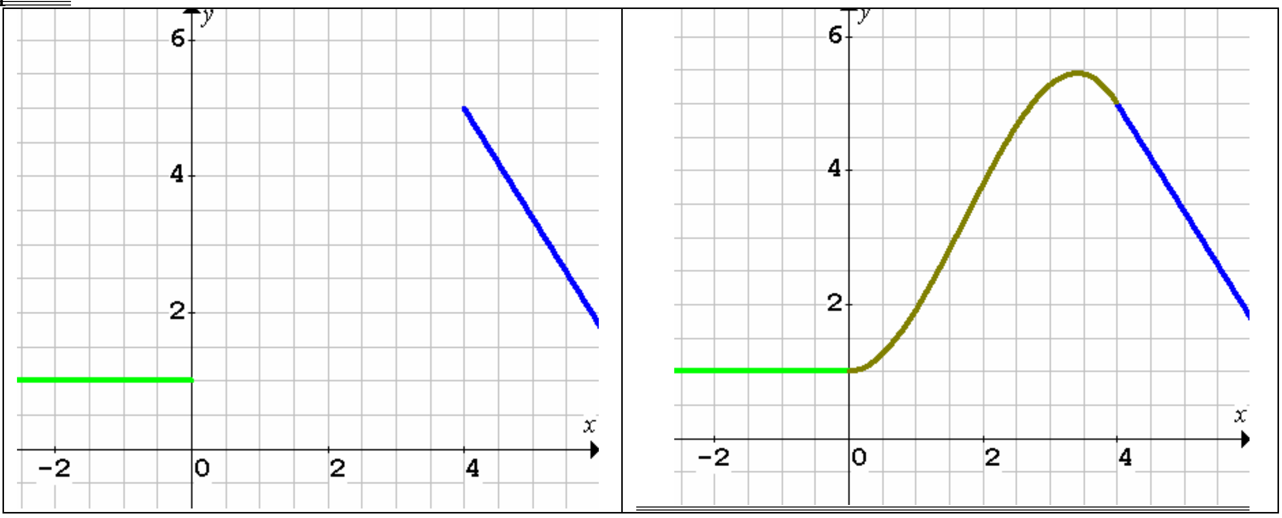
1. Interpolations-Schema nach NEWTON entwickeln, (Eventuell Vordruck)
2. Die dividierten Differenzen berechnen
3. Die NEWTON-Form formulieren
4. Daraus die HORNER-Form entwickeln
5. Aus der NEWTON-Form die Hauptform bestimmen
6. Mit der HORNER-Form die Auswertung(en) $f(x)$ durchführen

4.8 Kubischer Ausgleich

Mit der Zunahme der Stützpunkte P_i steigt der Grad *n* der interpolierenden Polynomfunktionen.
Mit zunehmendem Grad werden die Polynomfunktionen immer "welliger", sie oszillieren stärker.

Um glattere Polynomfunktionen zu erhalten interpoliert man stückweise und berechnet stetig-differenzierbare Übergänge an den Stützpunkten.

Beisp. 4.4



Es sind zwei Funktionen gegeben:

$f(x) = 1$ für $-u < x < 0$

$h(x) = -1{,}6\,x + 11{,}4$ für $4 < x < u$

Die Randpunkte $(0 \mid 1)$ und $(4 \mid 5)$ sollen stetig-differenzierbar durch eine Polynomfunktion *g* verbunden werden.

Stetig heißt $g(0) = f(0) = 1$ und $g(4) = h(4) = 5$ (kein Sprung).

Differenzierbar heißt $g'(0) = f'(0) = 0$ und $g'(4) = h'(4) = -1{,}6$ (kein Knick).

Auf die Limes-Schreibweise an den Randpunkten verzichten wir.

Wir haben 4 Informationen, dadurch ist eine Polynomfunktion von Grad 3 bestimmt.

Wir können die Koeffizienten von $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ mit einem linearen Gleichungssystem $\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$ ermitteln. (Newton-Interpolation wäre hier auch möglich.)

Für die Ableitung gilt $g'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2$.

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(4) = 5 \\ g'(0) = 0 \\ g'(4) = 1{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 5 \\ a_1 = 0 \\ a_1 + 8a_2 + 48a_3 = -1{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a_2 + 64a_3 = 4 \\ 8a_2 + 48a_3 = -1{,}6 \end{cases} \Rightarrow -32a_3 = 7{,}2$$

$$\Rightarrow a_3 = -2{,}25. \qquad 16a_2 + 64 \cdot (-0{,}225) = 4 \Rightarrow a_2 = 1{,}15$$

$$\Rightarrow g(x) = 1 + 1{,}15x^2 - 0{,}225x^3 \quad \text{für} \quad 0 < x \le 4$$

Man nennt einen Übergang an einer Stützstelle $P_i\,(x_i\,,\,y_i)$ glatt, wenn die dort angrenzenden Funktionen *f* in $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ übereinstimmen. Solche Funktionen nennt man Splines $s(x)$.
Kubische Splines haben den Grad $n = 3$. "Spanten"

Sie haben die kleinstmögliche Gesamtkrümmung $\int_{x_0}^{x_n} \left(s''(x)\right)^2 dx \to Minimum$

4.9 Spline - Grundlagen

Es seien n+1 Stützpunkte gegeben $P_0\ (x_0\ ,\ y_0)\ \dots\ P_n\ (x_n\ ,\ y_n)$
=> der Bereich $[x_0\ ,\ x_n]$ wird in n Intervalle zerlegt
=> es sind n kubische Splines $s_i(x)$ zu bestimmen, mit $i = 0, 1, 2, \dots, n\text{-}1$.

Ein kubischer Spline hat in Normalform die Gleichung $s(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
Wir benutzen für die Koeffizienten *a, b, c, d* um doppelte Indizes zu vermeiden.
=> es sind $4\,n$ unbekannte Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i zu ermitteln.

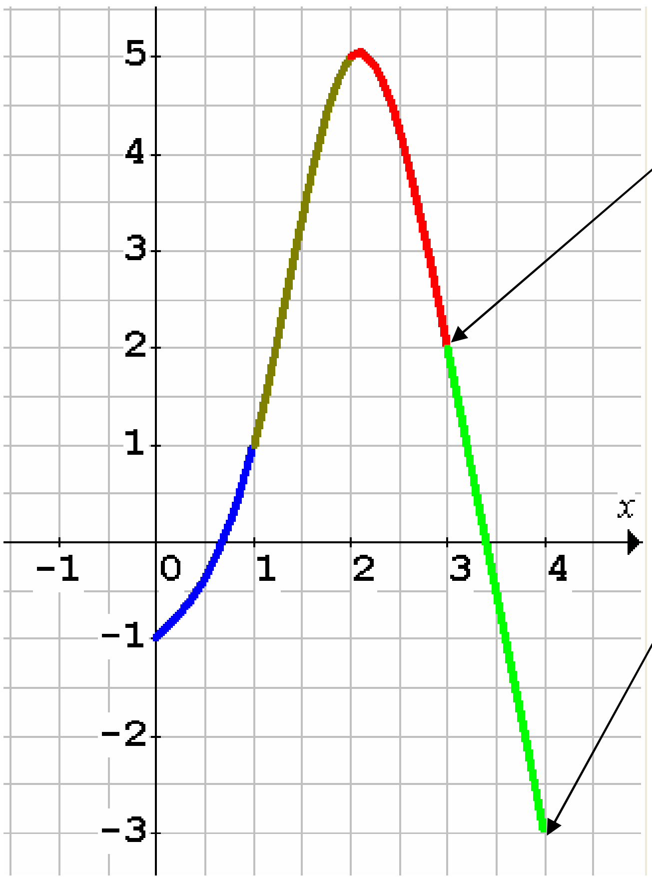
Die Verschiebung einer Funktion um t nach rechts lässt sich mit Hilfe folgender Form darstellen:
$s(x) = a\,(x - t)^3 + b\,(x - t)^2 + c\,(x - t) + d$
Wenn man diese Verschiebungen um t für die Stützstellen x_i ausnutzt, ergibt sich folgende Formulierung für eine kubischen Splinefunktion:

$$s_i(x) = \begin{cases} a_0\cdot(x-x_0)^3 + b_0\cdot(x-x_0)^2 + c_0\cdot(x-x_0) + d_0 & \text{für } x \in [x_0\ ,\ x_1] \\ a_1\cdot(x-x_1)^3 + b_1\cdot(x-x_1)^2 + c_1\cdot(x-x_1) + d_1 & \text{für } x \in [x_1\ ,\ x_2] \\ \dots & \\ a_{n-1}\cdot(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}\cdot(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}\cdot(x-x_{n-1}) + d_{n-1} & \text{für } x \in [x_{n-1}\ ,\ x_n] \end{cases}$$

Die Teil-Funktionen $s_i(x) = a_i\cdot(x-x_i)^3 + b_i\cdot(x-x_i)^2 + c_i\cdot(x-x_i) + d_i$ sind zu bestimmen. ❶

<u>Beisp. 4.5</u> 5 Stützpunkte, 4 kubische Funktionen, 16 Koeffizienten

5 Punkte gegeben:	i = 0	1	2	3	4
4 Intervalle:	s(0)	s(1)	s(2)	s(3)	



Punkt P_3
am Ende der Funktion $s_2(x)$
dort gelten die Gleichungen:
$s_2(x_3) = y_3$
$s_2(x_3) = s_3(x_3)$ stetig
$s_2'(x_3) = s_3'(x_3)$ gleiche Steigung
$s_2''(x_3) = s_3''(x_3)$ gleiche Krümmung
Entsprechendes gilt für die
Punkte P_1 und P_2
zusammen 3 · 4 = 12 Gleichungen

Randpunkt P_4
am Ende der Funktion $s_3(x)$
dort gelten die Gleichungen:
$s_3(x_4) = y_4$
$s_3''(x_4) = 0$ gewählt
Entsprechendes gilt für
den Randpunkt P_0
zusammen 4 Gleichungen

insgesamt 16 Gleichungen
für 16 Koeffizienten

B-Splines

4.10 Spline – Entwicklung

1. Für die Punkte $(x_i \mid y_i)$ gilt $s_i(x_i) = y_i$
   wenn man dies mit der Gleichung 1 durchführt, ergibt sich
   $s_i(x_i) = a_i (x_i - x_i)^3 + b_i (x_i - x_i)^2 + c_i (x_i - x_i) + d_i = y_i$
   die Klammern $(x_i - x_i)$ werden sämtlich null und es ist $d_i = y_i$ 2

2. Die Teil-Funktionen gehen stetig ineinander über, d.h. $s_{i-1}(x_i) = s_i(x_i)$ oder
   $a_{i-1} (x_i - x_{i-1})^3 + b_{i-1} (x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + d_{i-1} = a_i (x_i - x_i)^3 + b_i (x_i - x_i)^2 + c_i (x_i - x_i) + d_i$
   =>
   $a_{i-1} (x_i - x_{i-1})^3 + b_{i-1} (x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + d_{i-1} = d_i$ 3
   - $i = 1$: $a_0 (x_1 - x_0)^3 + b_0 (x_1 - x_0)^2 + c_0 (x_1 - x_0) + d_0 = d_1$
   - $i = 2$: $a_1 (x_2 - x_1)^3 + b_1 (x_2 - x_1)^2 + c_1 (x_2 - x_1) + d_1 = d_2$

3. An den Übergangspunkten haben die Teil-Funktionen die gleichen Steigungen $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$.
   $s_i(x) = a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i$
   Also gilt für die 1. Ableitungen $s'(x_i) = 3 a_i (x - x_i)^2 + 2 b_i (x - x_i) + c_i$
   Hieraus ergibt sich:
   $3 a_{i-1} (x_i - x_{i-1})^2 + 2 b_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = 3 a_i (x_i - x_i)^2 + 2 b_i (x_i - x_i) + c_i$
   =>
   $3 a_{i-1} (x_i - x_{i-1})^2 + 2 b_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = c_i$ 4

4. An den Übergangspunkten haben die Teil-Funktionen die gleichen Krümmungen $s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i)$.
   Für die 2. Ableitungen gilt: $s''(x_i) = 6 a_i (x - x_i) + 2 b_i$
   Hieraus ergibt sich:
   $6 a_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + 2 b_{i-1} = 6 a_i (x_i - x_i) + 2 b_i$
   => $6 a_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + 2 b_{i-1} = 2 b_i \quad | : (x_i - x_{i-1})$ => $a_{i-1} = \dfrac{b_i - b_{i-1}}{3(x_i - x_{i-1})}$ 5
   Für die Randpunkte P_0 und P_n wählen wir $s''(x_i) = 0$, also $6 a_i (x_i - x_i) + 2 b_i = 0$
   daraus ergeben sich $b_0 = 0$ und $b_n = 0$ 6
   Solche Spline-Funktionen nennt man natürliche Spline-Funktionen.

5. Wenn man den Ansatz 5 für a_{i-1} in 4 einsetzt, ergibt sich
   $$3 \cdot \frac{b_i - b_{i-1}}{3(x_i - x_{i-1})} \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + 2\, b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = c_i$$
   => $(b_i - b_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) + 2 b_{i-1} (x_i - x_{i-1})$ => $(b_i + b_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = c_i$ 7

6. Wenn man den Ansatz 5 für a_{i-1} in 3 einsetzt, ergibt sich
   $$\frac{b_i - b_{i-1}}{3(x_i - x_{i-1})} \cdot (x_i - x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1} = d_i$$
   $$\Rightarrow \tfrac{1}{3}(b_i - b_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1} = d_i \qquad | : (x_i - x_{i-1})$$
   $$\Rightarrow \frac{(b_i - b_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})}{3} + b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} + \frac{d_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{d_i}{x_i - x_{i-1}} \qquad \text{| Brüche zusammenfassen}$$
   $$\Rightarrow \frac{(b_i - b_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})}{3} + b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = \frac{d_i - d_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad \text{| nach } c_{i-1} \text{ auflösen, ab hier } y_i = d_i$$
   $$\Rightarrow c_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{(b_i - b_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})}{3} - b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \quad 8$$
   dann gilt auch: $$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{(b_{i+1} - b_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)}{3} - b_i(x_{i+1} - x_i) \quad 9$$

4.11 SPLINE – GLEICHUNGSSYSTEM X · b = r

1. Die Ansätze 8 für c_{i-1} und 9 für c_i werden in Gleichung 7 eingesetzt:

$$8 \quad c_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{(b_i - b_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1})}{3} - b_{i-1}(x_i - x_{i-1})$$

$$9 \quad c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{(b_{i+1} - b_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)}{3} - b_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$7 \quad (b_i + b_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = c_i$$

$$\Rightarrow (b_i + b_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{(b_i - b_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1})}{3} - b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{(b_{i+1} - b_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)}{3} - b_i(x_{i+1} - x_i) \quad |\cdot 3$$

$$\Rightarrow 3(b_i + b_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) + 3\cdot\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - (b_i - b_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) - 3b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = 3\cdot\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - (b_{i+1} - b_i)\cdot(x_{i+1} - x_i) - 3b_i(x_{i+1} - x_i) \quad | \text{ ausmult., ordnen}$$

$$\Rightarrow 3b_i(x_i - x_{i-1}) + 3b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - b_i(x_i - x_{i-1}) + b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - 3b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + {}$$
$$+ b_{i+1}\cdot(x_{i+1} - x_i) - b_i\cdot(x_{i+1} - x_i) + 3b_i(x_{i+1} - x_i) = 3\cdot\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) = r_i$$

$$\Rightarrow (x_i - x_{i-1})b_{i-1} + 2b_i(x_i - x_{i-1}) + 2b_i(x_{i+1} - x_i) + (x_{i+1} - x_i)b_{i+1} = r_i$$

$$\Rightarrow (x_i - x_{i-1})b_{i-1} + 2(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)b_i + (x_{i+1} - x_i)b_{i+1} = r_i$$

$$\Rightarrow (x_i - x_{i-1})b_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})b_i + (x_{i+1} - x_i)b_{i+1} = 3\cdot\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) = r_i$$

Diese Gleichung ist das lineare Gleichungssystem ***X · b = r***
Die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite besteht aus bekannten Differenzen.
Die Koeffizienten ***b*** = $(b_i) = (b_1, b_2, \ldots b_{n-1})$ sind die Lösung des Gleichungssystems.
Die Krümmungen in den Randpunkten haben wir mit $s''_0(x_0) = 0$ und $s''_n(x_n) = 0$ gewählt, deswegen gilt $b_0 = 0$ und $b_n = 0$.

2. Die Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ sind die Lösung des Gleichungssystems:

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$	b_{n-1}	r_i
$i=1$	$2(x_2 - x_0)$	$x_2 - x_1$	0	0	$\cdots$	0	r_1
$i=2$	$x_2 - x_1$	$2(x_3 - x_1)$	$x_3 - x_2$	0	$\cdots$	0	r_2
$i=3$	0	$x_3 - x_2$	$2(x_4 - x_2)$	$x_4 - x_3$	$\cdots$	0	r_3
$i=4$	0	0	$x_4 - x_3$	$2(x_5 - x_3)$	$\cdots$	0	r_4
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$
$i=n-1$	0	0	0	0	0	$2(x_n - x_{n-2})$	r_{n-1}

3. Die Koeffizienten c_i und a_i erhält man durch Einsetzen in 5 und 8

4.12 Spline – Beispiel

Beisp. 4.6 5 Stützpunkte, 4 kubische Funktionen, 16 Koeffizienten → *Excel / Spline*

Bestimmen Sie die Splinefunktion s(x) für folgende Punkte
(-2 | 1), (1 | 2), (2 | 3), (3 | 2), (5 | 1)

	x(i)	y(i)	a(i)	b(i)	c(i)	d(i) = y(i)
i=0	-2	1		0		1
i=1	1	2				2
i=2	2	3				3
i=3	3	2				2
i=4	5	1	---	0	---	1

Als Koeffizienten erhalten wir:

	x(i)	y(i)	a(i)	b(i)	c(i)
i=0	-2	1	0,052	0	-0,136
i=1	1	2	-0,741	0,469	1,272
i=2	2	3	0,765	-1,753	-0,012
i=3	3	2	-0,090	0,542	-1,223
i=4	5	1	---	0	---

Die Gleichung der Splinefunktion ist dann:

$$s_i(x) = \begin{cases} 0{,}052(x+2)^3 - 0{,}136\cdot(x+2)+1 & \text{für } x \in [-2\,,\ 1] \\ -0{,}741(x-1)^3 + 0{,}469\cdot(x-1)^2 + 1{,}272\cdot(x-1)+2 & \text{für } x \in [1\,,\ 2] \\ 0{,}765(x-2)^3 - 1{,}753\cdot(x-2)^2 - 0{,}012\cdot(x-2)+3 & \text{für } x \in [2\,,\ 3] \\ -0{,}09(x-3)^3 + 0{,}542\cdot(x-3)^2 - 1{,}223\cdot(x-3)+2 & \text{für } x \in [3\,,\ 5] \end{cases}$$

Aufgabe Spline

Gegeben: Randpunkte und Stützpunkte als Wertetabelle (x_i | y_i).

Gesucht: die Splinefunktion, sie besteht abschnittsweise aus n-1 Teilfunktionen $s_i(x)$.

Schritte:

1. Arbeitstabelle mit den Spalten für die Koeffizienten x_i, $y_i = d_i$, a_i , b_i , c_i .
   für r_i (ohne r_0 und r_n) eventuell eigene Spalte hinter y_i.
   Spalte d_i ist überflüssig, sie ist nur eine Kopie von y_i.
   Eine geeignete Arbeitstabelle wird meistens vorgegeben.
2. Triviale Ergebnisse eintragen $d_i = y_i$. $b_0 = 0$, $b_n = 0$. Striche bei a_n ,c_n, r_0, r_n.
3. Gleichungssystem entwickeln und mit GAUß-JORDAN-Verfahren lösen p b_i
4. b_i einsetzen in $a_{i-1} = \dfrac{b_i - b_{i-1}}{3(x_i - x_{i-1})}$
5. a_i, b_i einsetzen in $c_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \dfrac{(b_{i+1} - b_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)}{3} - b_i(x_{i+1} - x_i)$
6. Splinefunktion formulieren,
   Empfehlung: Ansatz mit entsprechenden Lücken schon zu Beginn hinschreiben:

$s_0(x) =$	$(x \quad)^3$		$(x \quad)$	für	$x \in [\quad ,\quad]$
$s_1(x) =$	$(x \quad)^3$	$(x \quad)^2$	$(x \quad)$	für	$x \in [\quad ,\quad]$
$s_2(x) =$	$(x \quad)^3$	$(x \quad)^2$	$(x \quad)$	für	$x \in [\quad ,\quad]$
$s_3(x) =$	$(x \quad)^3$	$(x \quad)^2$	$(x \quad)$	für	$x \in [\quad ,\quad]$

4.13 BERNSTEIN-POLYNOME

BERNSTEIN-Polynome werden mit Hilfe der Binomialentwicklung dargestellt.

Binomialsummanden B_i^n

Die Binomialentwicklung ist bekannt: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n$ *Teschl S.* 204 f

Speziell für $n = 3$ gilt: $(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$

Die Binomialkoeffizienten berechnet man mit $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$ z.B. $\binom{3}{1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3 = \binom{3}{2}$

Für Binomialentwicklungen gibt es eine Reihe von Gesetzmäßigkeiten, darunter auch:

1. Die Summanden B_i^n lassen sich rekursiv entwickeln.

   $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 = B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3$

   $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + 1\,b^2 = B_0^2 + B_1^2 + B_2^2$

   ❶ $B_i^n = a \cdot B_i^{n-1} + b \cdot B_{i-1}^{n-1}$ z.B. $B_2^3 = a \cdot B_2^2 + b \cdot B_1^2$ hier: $3\,a\,b^2 = a \cdot b^2 + b \cdot 2\,a\,b$

2. Wenn $a, b \in [0\,;\,1]$ und $a+b = 1$ gilt $(a + b)^n = 1$

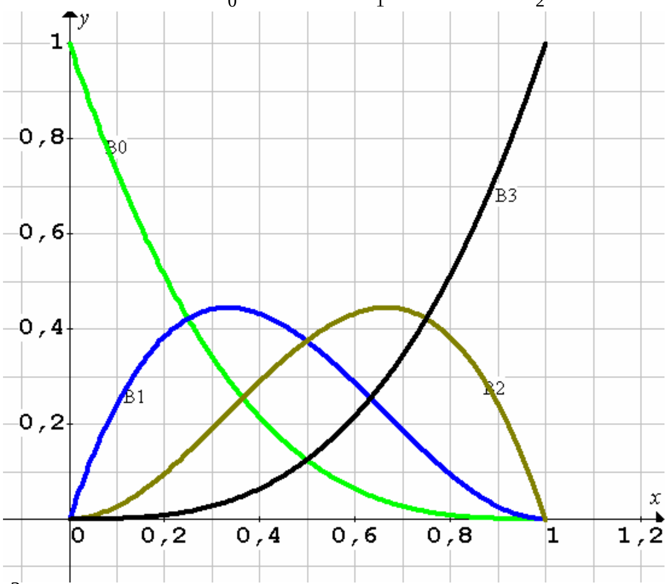
   insbesondere für $a = 1 - x$ und $b = x$ => $((1 - x) + x)^n = 1$

BERNSTEIN-Polynome sind definiert für das Intervall $[0\,,\,1]$

$$B_i^n(x) = \left((1-x)+x\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i = 1 \quad \text{für } 0 \le x \le 1$$

für n=3: $\left((1-x)+x\right)^3 = (1-x)^3 x^0 + 3 \cdot (1-x)^2 x + 3 \cdot (1-x) \cdot x^2 + x^3 = 1.$

$B_0^3 \quad + \quad B_1^3 \quad + \quad B_2^3 \quad + B_3^3$



a) Die $B_i^3(x)$ haben eine i-fache Nullstelle für $x = 0$.

b) Die $B_i^3(x)$ haben eine 3–i-fache Nullstelle für $x = 1$

c) Sie haben nur ein Maximum im Intervall [0 , 1] und zwar bei $x = \frac{i}{n}$ also $0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$

Die Maximum-Stellen zerlegen das Intervall in $n = 3$ Teile.

[BERNSTEIN, Sergei Natanowitsch, Charkow, RUS, 1911]

4.14 BÉZIER-POLYNOME

BÉZIER-Polynomfunktionen f entstehen, wenn man BERNSTEIN-Polynome passend überlagert.
Dazu werden die Summanden der BERNSTEIN-Polynome mit Werten y_i gewichtet:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \binom{n}{i} (1-x)^{n-i}x^i = \sum_{i=0}^{n} y_i B_i^n(x) \qquad \text{für } 0 \le x \le 1$$

$$f(x)=y_0B_0^3+y_1B_1^3+y_2B_2^3+y_3B_3^3$$

$$f(x)=y_0(1-x)^3+y_1 3\cdot(1-x)^2x+y_2 3\cdot(1-x)\cdot x^2+y_3x^3 \quad ❷$$

$$f(x)=\left(\left(y_0(1-x)+3y_1x\right)\cdot(1-x)+3y_2x^2\right)\cdot(1-x)+y_3x^3 \qquad \text{(HORNER-Form)}$$

Die y-Werte sind die y-Koordinaten von Punkten P_i, die zusammen das BÉZIER-Polygon bilden.
Das BÉZIER-Polygon ist die minimale Hülle der BÉZIER-Kurve.

Beisp. 4.7 BÉZIER-Polygon und BÉZIER-Kurve

Die Punkte $P_0\,(0\,|\,1)$ $P_1\,(⅓\,|\,4)$ $P_2\,(⅔\,|\,3)$ $P_3\,(1\,|\,0)$ sind gegeben.
Sie bilden das BÉZIER-Polygon.
Die 4 Informationen zum Bestimmen der kubischen Polynomfunktion liegen in diesem Polygon.
Die y-Werte $y_0 = 1$, $y_1 = 4$, $y_2 = 3$, $y_3 = 0$ sind die Gewichte im BÉZIER-Polynom;

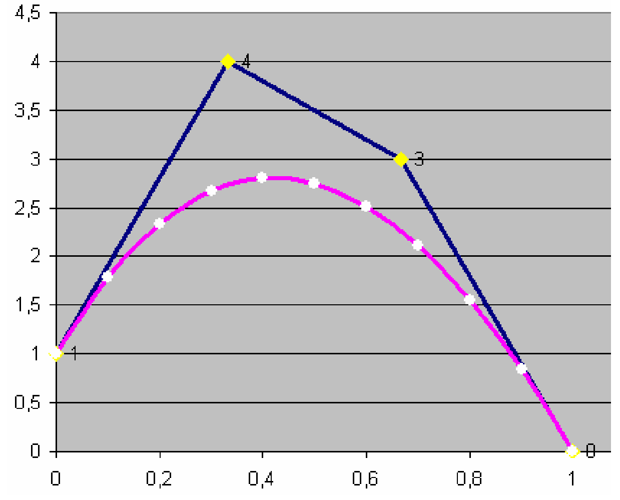
$$f(x)=1\cdot(1-x)^3+4\cdot 3\cdot(1-x)^2x+3\cdot 3\cdot(1-x)\cdot x^2+0x^3$$

$$f(x)=(1-x)^3+12\cdot(1-x)^2x+9\cdot(1-x)\cdot x^2$$

$$f(x)=\left(\left((1-x)+12x\right)\cdot(1-x)+9x^2\right)(1-x) \qquad \text{(HORNER-Form)}$$

→ Excel / Bézier

1. P_0 und P_3 liegen auf der BÉZIER-Kurve.
2. Die Geraden durch P_0,P_1 bzw. P_2,P_3 sind Tangenten in den Randpunkten der BÉZIER-Kurve.
3. Die Steigungen der Strecken des Polygons sind $m=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{1/3}=3(y_{i+1}-y_i)$
4. Die Steigungen an den Randpunkten des BEZIER-Polynoms sind
   $f'(0) = 3(y_1-y_0)$ bzw. $f'(1) = 3(y_3-y_2)$
   im Beispiel $f'(0) = 9$, $f'(1) = -9$
5. Die Koeffizienten 1, 4, 3, 0 in der BÉZIER-Funktion haben eine anschauliche Bedeutung nämlich die y-Koordinaten des Polygons (der konvexen Hülle).



In vielen Anwendungen benötigt man die $f(x)$-Werte der BÉZIER-Kurve und deren Steigungen $f'(x)$.
Die einzelnen $f(x)$-Werte der BÉZIER-Kurve und ihre Steigungen $f'(x)$ bestimmt man rekursiv mit dem Verfahren von DE CASTELJAU ("de castelshó").

Wir verwenden die Rekursionsformel von Abschnitt 4.13 1

Für Summanden der Binomialentwicklung: $B_i^n = a\cdot B_i^{n-1}+b\cdot B_{i-1}^{n-1}$

angewendet für $a = (1-x)$ und $b = x$: $B_i^n(x)=(1-x)\cdot B_i^{n-1}+x\cdot B_{i-1}^{n-1}$

ergibt für $n=3$: $B_i^3(x)=(1-x)\cdot B_i^2+x\cdot B_{i-1}^2$

schließlich für BEZIER-Funktionen: $y_i^{(3)}(x)=(1-x)\cdot y_i^{(2)}+x\cdot y_{i-1}^{(2)}$

4.15 SCHEMA VON DE CASTELJAU

Die Werte $f(x)$ der BÉZIER-Funktion werden durch fortgesetzte Rekursion über die y-Koordinaten des BÉZIER-Polygons ermittelt: $y_{r,\dots,s}(x) = (1-x)\, y_{r,\dots,s-1} + x\, y_{r+1,\dots,s} \to f(x)$

Die Zwischenwerte der Rekursion bezeichnen wir mit $y_{0,1}$ $y_{1,2}$ $y_{2,3}$ dann $y_{0,1,2}$ $y_{1,2,3}$ und $y_{0,1,2,3}$ je nachdem, aus welchen vorangehenden y-Werten der Wert hervorgeht.

$$y_{01} = (1-x)y_0 + xy_1 \qquad y_{12} = (1-x)y_1 + xy_2 \qquad y_{23} = (1-x)y_2 + xy_3$$

$$y_{012} = (1-x)\cdot\big((1-x)\,y_0 + xy_1\big) + x\cdot\big((1-x)\,y_1 + xy_2\big)$$

$$y_{123} = (1-x)\cdot\big((1-x)\,y_1 + xy_2\big) + x\cdot\big((1-x)\,y_2 + xy_3\big)$$

$$y_{0123} = (1-x)\cdot\Big[(1-x)\big((1-x)\,y_0 + xy_1\big) + x\big((1-x)\,y_1 + xy_2\big)\Big] + x\cdot\Big[(1-x)\big((1-x)\,y_1 + xy_2\big) + x\big((1-x)\,y_2 + xy_3\big)\Big]$$

$$= (1-x)\cdot\Big[(1-x)^2 y_0 + \underline{(1-x)xy_1 + (1-x)xy_1} + x^2 y_2\Big] + x\cdot\Big[(1-x)^2 y_1 + \underline{(1-x)xy_2 + (1-x)xy_2} + x^2 y_3\Big]$$

$$= (1-x)\cdot\Big[(1-x)^2 y_0 + 2(1-x)xy_1 + x^2 y_2\Big] + x\cdot\Big[(1-x)^2 y_1 + 2(1-x)xy_2 + x^2 y_3\Big]$$

$$= (1-x)^3 y_0 + 2(1-x)^2 xy_1 + (1-x)x^2 y_2 + (1-x)^2 xy_1 + 2(1-x)x^2 y_2 + x^3 y_3$$

$$= (1-x)^3 y_0 + 3(1-x)^2 xy_1 + 3(1-x)x^2 y_2 + x^3 y_3 = f(x) \quad ❷$$

Die sich hierbei ergebenden y-Werte sind die jeweiligen Teilungspunkte auf den Interpolations-Strecken, was man auch graphisch darstellen kann.

Für die Steigungen dieser Strecken gilt wieder $m = 3\,(y_{i+1} - y_i)$.

Beisp. 4.7 Fortsetzung, Schema nach DE CASTELJAU → *Excel / Bézier*

Bestimmen Sie für x = 0,4 den Wert f(x) auf der BÉZIER-Kurve.

$$\begin{array}{c|llll}
 & y_0 & & & \\
1-x & y_1 & y_{01} & & \\
x & y_2 & y_{12} & y_{012} & \\
 & y_3 & y_{23} & y_{123} & y_{0123}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|llll}
 & y_0 & & & \\
1-x & y_1 & y_{01} = (1-x)y_0 + xy_1 & & \\
x & y_2 & y_{12} = (1-x)y_1 + xy_2 & y_{012} = (1-x)y_{01} + xy_{12} & \\
 & y_3 & y_{23} = (1-x)y_2 + xy_3 & y_{123} = (1-x)y_{12} + xy_{23} & y_{0123} = (1-x)y_{012} + xy_{123}
\end{array}$$

Steigung am Punkt $(x \mid f(x))$: $f'(x) = 3\cdot(y_{123} - y_{012}) = 3\cdot(y_n - y_{n-1})$

Steigungswinkel am Punkt $(x \mid f(x))$: $\neg(x) = \arctan f'(x)$

4.15A BÉZIER — AUFGABE

Aufgabe BÉZIER

Gegeben: Vier Punkte des BÉZIER-Polygons im Intervall [0 ; 1] mit äquidistanten x-Koordinaten und ein oder zwei x-Werte.

Gesucht: BÉZIER-Polygon zeichnen,
BÉZIER-Polynomfunktion formulieren, auch in HORNER-Form
Den Punkt P auf der BÉZIER-Kurve für den gegebenen x-Wert berechnen
mit dem Schema nach DE CASTELJAU
Für diesen Punkt Steigung und Steigungswinkel (in Grad) bestimmen.
Die BÉZIER-Kurve auf Grund dieser Eigenschaften skizzieren

Schritte:

1. Punkte in Koordinatenebene eintragen und zum Polygon verbinden
2. $f(x) = y_0(1-x)^3 + y_1 3\cdot(1-x)^2 x + y_2 3\cdot(1-x)\cdot x^2 + y_3 x^3$
   $f(x) = \left(\left(y_0(1-x)+3y_1 x\right)\cdot(1-x)+3y_2 x^2\right)\cdot(1-x)+y_3 x^3$
3. Schema erstellen, Rechnungen wie z.B. $y_{012} = (1-x)y_{01} + xy_{12}$ durchführen
   Wertepaar P $(x \mid f(x))$ angeben
4. $f'(x) = 3\cdot(y_{123} - y_{012})$ und ¬(x) = arctan $f'(x)$
5. Punkte P_0, P, P_3 sinnvoll miteinander verbinden

4.16 BÉZIER — AUSBLICKE

Bis in die sechziger Jahre des vorigen Jahrhunderts wurden Konturen mit Kurvenlinealen und "frei Hand" entwickelt. Das galt für Schriften ebenso wie für Autokarosserien.
Die so entwickelten Konturen wurden punkteweise in die Werkzeugmaschinen eingegeben.
Die NC-Werkzeugmaschinen (numeric control) hatten sich durchgesetzt, aber der Entwurfsprozess war noch rein manuell.

PAUL DE FAGET DE CASTELJAU bei Citroën und, unabhängig davon, PIERRE BÉZIER bei Renault erkannten, dass dieser Flaschenhals der modernen Produktion überwunden werden könnte, wenn diese Kurven und Flächen möglichst einfach dargestellt und mit einfachen Parametern (den y_i) gesteuert werden.
Damit gelten sie als Erfinder des CAD (computer aided design). 1959-1962
Die Computergrafik arbeitet durchweg mit BEZIER-Kurven, z.B. auch die Truetype-Schriften.

Die Interpolation mit BÉZIER-Polynomen und DE CASTELJAU-Schema ist wesentlich weitreichender als oben dargestellt wurde.

1. Die Eckpunkte der konvexen Hülle (des BÉZIER-Polygons) sind nicht zwingend äquidistant. Die x-Koordinaten der Stützpunkte können beliebig über das Intervall verteilt sein.

2. Die BÉZIER-Interpolation kann man auch für Kurven benutzen, die keine Funktionsgraphen sind, sondern Graphen von Relationen. In diesem Fall werden x- und y-Koordinaten getrennt nach dem Schema von DE CASTELJAU ermittelt, vgl. Abbildung 1.

3. Um möglichst glatte Kurven zu erhalten, bleibt man beim Grad 3, also bei kubischen BÉZIER-Polynomen.
   Man kann die Entwicklung der BÉZIER-Kurven aber auf beliebige Intervalle ausdehnen.
   Man baut dazu übergeordnete konvexe Hüllen auf.
   An den Übergangspunkten ("Interpolationsstellen", "Trennstellen")
   zwischen aufeinander folgenden BÉZIER-Kurven stimmen 1. und 2. Ableitungen überein.
   Damit kommt man zu BÉZIER-Splines, vgl. Abbildung 2 b_i e y_i.

4. Um räumliche Konturen zu erhalten setzt man stückweise BÉZIER-Flächen (patches) zusammen. Statt Strecken zwischen den Punkten $P_{r,\dots,s}$ entstehen Tangentialflächen, insgesamt ergeben sich bikubische BÉZIER-Splines, Abbildung 3. b_i e y_i.

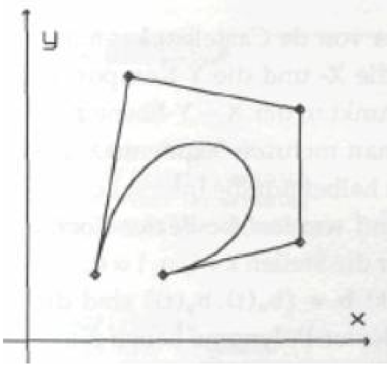


Abb.1

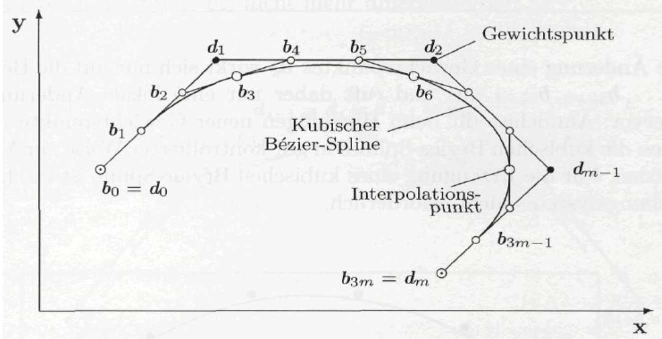


Abb.2

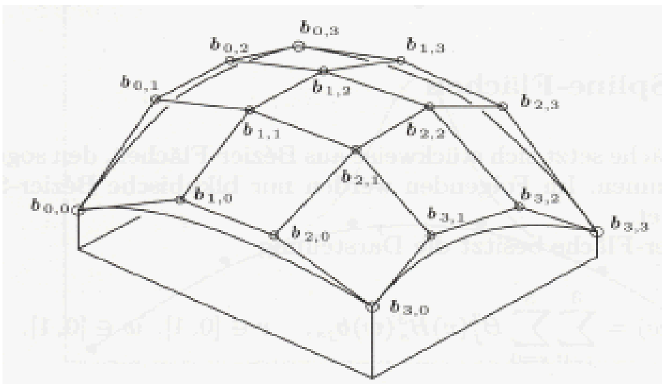


Abb.3

4.17 REGRESSIONSGERADE

Bei vielen Untersuchungsmethoden enthalten die Werte Messfehler.
In der Regel gibt es deshalb oft keinen Sinn eine interpolierende Funktion zu bestimmen, die genau durch die gemessenen Punkte verläuft.
Es genügt dann eine Funktion zu finden, die möglichst genau passt.
Eine solche Funktion nennt man Regressionsfunktion oder Ausgleichsfunktion.
Am einfachsten ist eine Regressionsgerade.

Beisp. 4.8 Eine Messreihe

Bei einem chemischen Prozess wird ein Zusammenhang zwischen der Bestrahlung mit UV-Licht *x* [Min] und dem Härtegrad *y* eines Polymers vermutet.
X sei die Einflussgröße und *Y* die beeinflusste Größe.
Entsprechenden Tests ergaben folgende Wertepaare (x_i | y_i).
Die Wertepaare (x_i | y_i) lassen sich als Punktwolke darstellen. → *Excel / A'–Regression*

Im einfachsten Fall könnte man einen linearen Zusammenhang der Form $y = m\,x + b$ vermuten.
Die Regressionsgerade $y = m\,x + b$ ist die optimal passende Gerade durch die Punktwolke.
Das Symbol für Schätzwert der Variablen *y* ist **y.**

1. Jede mögliche Gerade wird durch die beiden Parameter *m* und *b* festgelegt.
   Wir haben aber 10 Messwerte. Die Berechnung von *m*, *b* ist also überbestimmt.
   Zu jedem Datenpunkt (x_i | y_i) gibt es eine Abweichung vom Geradenpunkt $(\hat{x}\,|\,\hat{y})$.
   Die Regressionsgerade mit der Funktionsgleichung y = mx + b wird so gewählt, dass die Summe der Abweichungsquadrate minimal wird ("Methode der kleinsten Quadrate").

   Einzelne Abweichungen: $y_i - y_i = y_i - (m\,x_i + b) = y_i - m\,x_i - b$

   Einzelne Abweichungsquadrate: $(y_i - m\,x_i - b)^2$

   Summe der Abw.-Quadrate: $A = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$

   m und *b* sind die gesuchten unbekannten Koeffizienten

2. Das Minimum (den Tiefpunkt) der Funktion *A*(*m*,*b*) erhält man, wenn die 1.Ableitung *A'* = 0.

3. Die Funktion $A = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$ leitet man partiell nach *m* und nach *b* ab:

$$\begin{cases} A'(m) = \dfrac{\partial A}{\partial m} = \sum 2\cdot\left(y_i - mx_i - b\right)^1 \cdot\left(-x_i\right) = 0 \\ A'(b) = \dfrac{\partial A}{\partial b} = \sum 2\cdot\left(y_i - mx_i - b\right)^1 \cdot\left(-1\right) = 0 \end{cases}$$

$\dfrac{\partial y}{\partial x}$ sind partielle Ableitungen

siehe Abschnitt 3.19

(-1) vor die Summe:
$$\begin{cases} 0 = -2\sum\left(y_i - mx_i - b\right)\cdot\left(x_i\right) \\ 0 = -2\sum\left(y_i - mx_i - b\right) \end{cases}$$

Ausmultiplizieren:
$$\begin{cases} 0 = -2\sum\left(y_i \cdot x_i - mx_i^2 - bx_i\right) \\ 0 = -2\sum\left(y_i - mx_i - b\right) \end{cases}$$

:(-2), Einzelsummen:
$$\begin{cases} 0 = \sum x_i y_i - m\sum x_i^2 - b\sum x_i \\ 0 = \sum y_i - m\sum x_i - nb \end{cases}$$

4.18 Regressionskoeffizienten

Das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} 0 = \sum x_i y_i - m\sum x_i^2 - b\sum x_i \\ 0 = \sum y_i - m\sum x_i - nb \end{cases}$

lässt sich in Matrizen-Schreibweise formulieren und nach *m* und *b* auflösen.

$$\begin{cases} m\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum y_i x_i \\ m\sum x_i + nb = \sum y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

Diese nennt man Normalgleichungen bzw. Normalgleichungs-System.

Achtung: $\Sigma x \, \Sigma y \neq \Sigma\, xy \qquad \Sigma\, x^2 \neq (\Sigma\, x)^2$

Statt die Regressionskoeffizienten *m* und *b* mit dem obigen Gleichungssystem zu bestimmen, werden in der Praxis die Regressionskoeffizienten oft direkt angegeben:

$$\begin{cases} 0 = \sum y_i x_i - m\sum x_i^2 - b\sum x_i \\ 0 = \sum y_i - m\sum x_i - nb \end{cases}$$

2.Zeile nach b auflösen: $b = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{m}{n}\sum x_i$

b in 1.Zeile einsetzen:

$$0 = \sum x_i y_i - m\sum x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum y_i - \frac{m}{n}\sum x_i\right) \cdot \sum x_i$$

$$0 = \sum x_i y_i - m\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\sum y_i \cdot \sum x_i + \frac{m}{n}\left(\sum x_i\right)^2$$

m isolieren: $m\sum x_i^2 - \frac{m}{n}\left(\sum x_i\right)^2 = \sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum y_i \cdot \sum x_i$

m ausklammern: $m\left(\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right) = \sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum y_i \cdot \sum x_i$

: Klammer $m = \dfrac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum y_i \cdot \sum x_i}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2}$

mit $\frac{n}{n}$ erweitern: $m = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{m}{n}\sum x_i$

Als Lösungsvariable dieses Gleichungssystems ergeben sich die Regressionskoeffizienten:

$$a_1 = m = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad a_0 = b = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{m}{n}\sum x_i$$

für $\hat{y} = a_1\, x + a_0$ bzw. $\hat{y} = m\, x + b$

<u>weiter Beisp. 4.8 Eine Messreihe</u> → *Excel / A'–Regression*

Es ergibt sich $y = -0{,}478\, x + 5{,}015$
als beste Approximation (Näherung) für den vermuteten Zusammenhang.

Mit der Funktionsgleichung der Regressionsfunktion kann man Interpolationen durchführen:
Für die gegebene Bestrahlungszeit von $x = 5$ Minuten
schätzt man den Härtegrad auf $y\,(5) = -0{,}478.5 + 5{,}015 = 2{,}625$.

4.19 Minimum von A(m,b)

a) Beim Ableiten von $A=\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2$ ergeben sich 3 Probleme:

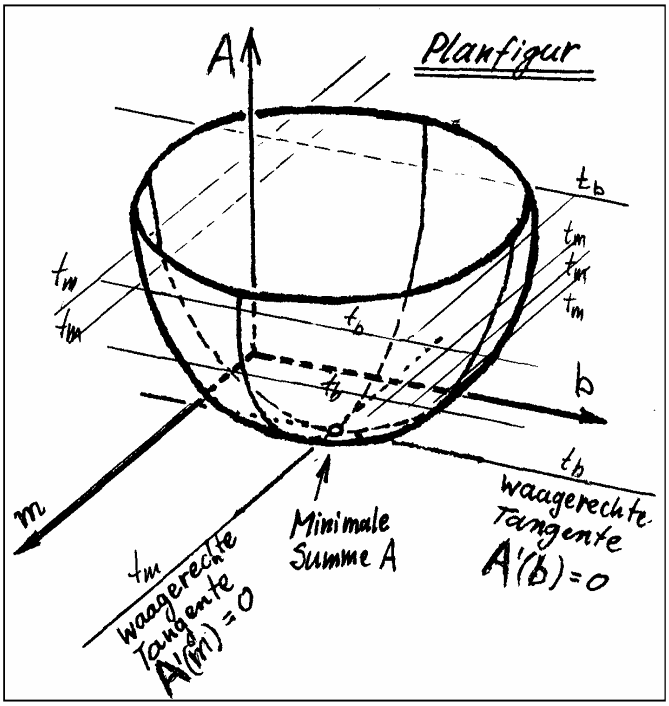
(1) Die Funktionsvariable ("Unbekannte") sind hier nicht x und y, sondern m und b. Die optimalen Werte für m (Geradensteigung) und b (y-Achsen-Abschnitt) sind gesucht. x_i und y_i sind die gemessenen und damit bekannten Tabellenwerte.

(2) Die Funktion enthält ein Summensymbol. Es gilt:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x),$$

das ist die Summenregel. Man kann also die Summe als Ganzes ableiten.

(3) $(y_i - mx_i - b)^2$ ist ein verketteter Ausdruck. Die innere Funktion ist $u(x) = y_i - mx_i - b$ und die äußere heißt $v(u) = (u(x))^2$. Man benutzt die Kettenregel $f(u(x))' = v'(u) \cdot u'(x)$.



b) Der Funktionsgraph zu A(m,b) ist eine "Mulde" im Koordinatenraum mit den drei Achsen A, m und b. Für jede Kombination (m,b) kann man die Summe der Abweichungsquadrate A(m,b) berechnen.

c) Die Tangenten t_m sind die "waagerechten" Tangenten in Richtung der m-Achse, für ihre Steigungen gilt $A'(m) = 0$. Eine dieser Tangenten t_m verläuft durch den Tiefpunkt.

Die Tangenten t_b sind die "waagerechten" Tangenten in Richtung der b-Achse, für ihre Steigungen gilt $A'(b) = 0$. Eine dieser Tangenten t_b verläuft durch den tiefsten Punkt.

Am tiefsten Punkt der "Mulde" schneiden sich die Tangenten, es gilt $A'(m) = 0$ und gleichzeitig $A'(b) = 0$. Man erhält also m und b durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} A'(m)=\dfrac{\partial A}{\partial m}=\sum 2\cdot(y_i - mx_i - b)^1\cdot(-x_i)=0 \\ A'(b)=\dfrac{\partial A}{\partial b}=\sum 2\cdot(y_i - mx_i - b)^1\cdot(-1)=0 \end{cases}$$

$\dfrac{\partial y}{\partial x}$ sind partielle Ableitungen

4.20 Einfache Regressionsfunktionen

Regressionsfunktionen der Form $y = a\,\varphi(x) + b$ nennen wir linearisierbare Regressionsfunktionen.

Bei den oben entwickelten Regressionsgeraden ist $\varphi(x) = x \Rightarrow y = a\,x + b$.

Bevor man eine Regressionsanalyse durchführt wählt man eine passende Ansatzfunktion $\varphi(x)$,

also beispielsweise $\varphi(x) = e^x,\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2},\ \varphi(x) = \sqrt[3]{x},\ \varphi(x) = \ln x$

Die Regressionsfunktion mit der Funktionsgleichung $y = a\,\varphi(x) + b$ wird so gewählt, dass die Summe der Abweichungsquadrate minimal wird ("Methode der kleinsten Quadrate"). Ganz analog der Herleitung in Abschnitt 3.17 folgt:

Einzelne Abweichungen: $y_i - \hat{y}_i = y_i - (a\,\varphi(x_i) + b) = y_i - a\,\varphi(x_i) - b$

Einzelne Abweichungsquadrate: $(y_i - a\,\varphi(x)_i - b)^2$

Summe der Abw.-Quadrate: $A = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a\,\varphi(x) - b)^2$

a und b sind die gesuchten unbekannten Koeffizienten

Die Ableitungen sind

$$\begin{cases} A'(a) = \dfrac{\partial A}{\partial a} = \sum 2\cdot\left(y_i - a\,\varphi(x_i) - b\right)\cdot\left(-\varphi(x_i)\right) = 0 \\ A'(b) = \dfrac{\partial A}{\partial b} = \sum 2\cdot\left(y_i - a\,\varphi(x_i) - b\right)\cdot(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \sum y_i \cdot \varphi(x_i) - a\sum\left(\varphi(x_i)\right)^2 - b\sum \varphi(x_i) \\ 0 = \sum y_i - a\sum\varphi(x_i) - nb \end{cases}$$

Auch in den Normalgleichungen werden die Ausdrücke x durch $\varphi(x_i)$ ersetzt:

$$\begin{cases} a\sum\left(\varphi(x_i)\right)^2 + b\sum\varphi(x_i) = \sum y_i\,\varphi(x_i) \\ a\sum\varphi(x_i) + nb = \sum y_i \end{cases}$$

Für die Regressionskoeffizienten kann man dann schreiben:

$$a = \frac{n\sum y_i\cdot\varphi(x_i) - \sum y_i \cdot \sum\varphi(x_i)}{n\sum\left(\varphi(x_i)\right)^2 - \left(\sum\varphi(x_i)\right)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{a}{n}\sum\varphi(x_i)$$

Zum Beispiel gilt für die Regressionskoeffizienten a und b

mit der Ansatzfunktion $\hat{y} = \dfrac{a}{\sqrt{x}} + b = a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}} + b$

$$a = \frac{n\sum y_i \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}} - \sum y_i \cdot \sum \frac{1}{\sqrt{x_i}}}{n\sum\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 - \left(\sum\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{a}{n}\sum\frac{1}{\sqrt{x_i}}$$

4.21 REGRESSIONSANALYSE

Beisp. 4.9 Regressionsanalyse mit der Ansatzfunktion $y = a \ln x + b$

Ein Unternehmen zeichnet über die Zeiträume x_i (12 Monate) die Absatzmengen y_i eines bestimmten Produktes auf. Das Unternehmen erwartet eine gewisse Marktsättigung und benutzt daher für die Bestimmung des Trends und für Prognosen die Ansatzfunktion $y = a \ln x + b$. Zu bestimmen sind:

a) Die Ableitungen $\frac{\partial A}{\partial a}$ und $\frac{\partial A}{\partial b}$ für die Summe der Abweichungsquadrate A.
b) Die Normalgleichungen
c) Die Formeln für die Regressionskoeffizienten (Herleitung nicht erforderlich).
d) Die Funktionsgleichung der Regressionsfunktion.
e) Die Prognosen für den 13. und 14. Monat.

a) $A = \sum_{i=1}^{12} (y_i - a \ln x - b)^2$

$$\begin{cases} A'(a) = \frac{\partial A}{\partial a} = \sum 2 \cdot (y_i - a \ln x_i - b) \cdot (-\ln x_i) = 0 \\ A'(b) = \frac{\partial A}{\partial b} = \sum 2 \cdot (y_i - a \ln x_i - b) \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} a \sum (\ln x_i)^2 + b \sum \ln x_i = \sum y_i \ln x_i \\ a \sum \ln x_i + nb = \sum y_i \end{cases}$$

c) $a = \dfrac{n \sum y_i \cdot \ln x_i - \sum y_i \cdot \sum \ln x_i}{n \sum (\ln x_i)^2 - \left(\sum \ln x_i\right)^2}$ $\qquad b = \frac{1}{n} \sum y_i - \frac{a}{n} \sum \ln x_i$ $\qquad$ → *Excel / A'–Regression*

d) $\boxed{\hat{y} = 1{,}172 \ln x + 0{,}965}$

e) 13.Monat 3971 kg, 14.Monat 4057 kg

In Excel: Punkt aus der Punktwolke markieren, dann Rechtsklick, "Trendlinie einfügen"

Aufgabe A'–Regression mit y = a ³(x) + b

Gegeben: Wertetabelle $(x_i \mid y_i)$, $n = 5..6$, Ansatzfunktion ³(x)
zusätzlicher Wert für eine Interpolation

Gesucht:

a) Die Ableitungen $\frac{\partial A}{\partial a}$ und $\frac{\partial A}{\partial b}$ für die Summe der Abweichungsquadrate A.
b) Die Formeln für die Regressionskoeffizienten (Herleitung nicht erforderlich).
c) Die Funktionsgleichung der Regressionsfunktion.
d) Prognosewerte, Interpolationswerte

Schritte: genau wie in Beispiel 4.9 gezeigt y = a ³(x) + b $y = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2$ y = a + b x + c u + d v

4.22 TRANSPONIERTE VANDERMONDE-MATRIX

Beisp. 4.10 *nach Knorrenschild S.90 ff*

Vier Messungen ergaben nebenstehende Wertetabelle.

Die Ansatzfunktion sei eine Gerade, y = a x + b oder $y = a_0 + a_1 x$.

Wir bestimmen die Regressionskoeffizienten mit dem analytischen Ansatz über die Ableitungen der Summe der Abweichungsquadrate:

→ *Excel / V^T-Regression*

x_i	y_i
1	6
2	6,8
3	10
4	10,5

Als Normalgleichungssystem ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33{,}3 \\ 91{,}6 \end{pmatrix}$$

Mit der Lösung $a_1 = m = 1{,}67$. $a_0 = b = 4{,}15$. $y = 1{,}67\,x + 4{,}15$

(Spalten getauscht, wegen der Index-Reihenfolge in der VANDERMONDE-Matrix)

(Zeilen getauscht, spielt für die Lösung keine Rolle)

Mit der Vandermonde-Matrix könnte man aus 2 Wertepaaren die Geradengleichung bestimmen.

Siehe Abschnitt 4.3

Kennt man 2 Stützpunkte $(x_i \mid y_i)$ dann lassen sich die Koeffizienten a_0, a_1 bestimmen:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$$

Wir haben aber eine VANDERMONDE-Matrix mit 4 Zeilen.

Unser lineares Gleichungssystem ist überbestimmt:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 = y_2 \\ a_0 + a_1 x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das führt in aller Regel zu einem Widerspruch.

Man kann das lineare Gleichungssystem nur mit einem minimalen Fehler $A_{\min}$ lösen.

Durch Multiplikation der Gleichung $\boldsymbol{V \cdot a = y}$ mit der transponierten Matrix $\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}$ entsteht die Gleichung $\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V\,a} = \boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$.

Die linke Seite $\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}$ ist eine quadratische, sogar symmetrische Matrix.

Mit der Matrizengleichung $\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V\,a} = \boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$ kann man also die Koeffizienten $\boldsymbol{a}$ berechnen.

→ *Excel / V^T-Regression*

				V				**y**
				1	1			6
				1	2			6,8
				1	3			10
$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$				1	4			10,5
1	1	1	1					
1	2	3	4					
				$\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}$				$\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$

⇒

				1	1		6
				1	2		6,8
				1	3		10
$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$				1	4		10,5
1	1	1	1	4	10		33,3
1	2	3	4	10	30		91,6

Es ergeben sich dieselben Normalgleichungen,

man erkennt wie bei der Multiplikation mit $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ nacheinander die Summen

$n, \sum x_i, \sum x_i^2, \sum y_i, \sum x_i y_i$ entstehen.

Die Regressionsanalyse mit Hilfe der Gleichung $\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V\,a} = \boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$ nennen wir V^T-Regression, sie ist viel weitreichender als die A'–Regression über die Ableitungen *A'(m,b)*.

4.23 V^T-REGRESSION

Übersicht

1. **A'**–Regression
   1.1 Lineare Regression im engeren Sinne. Berechnung einer Regressionsgeraden $y(x) = m\,x + b$
   Man erstellt eine Arbeitstabelle für $x_i y_i$, x_i^2,bestimmt die Summen und löst $\boldsymbol{A\ a = y}$
   1.2 Linearisierbare Regressionsmodelle der Form $y(x) = a\ ^3\ (x) + b = a_0 + a_1\ ^3(x)$
   Man erstellt eine Arbeitstabelle für $^3(x_i)$, $^3(x_i)\cdot y_i$, $^3(x_i)^2$,bestimmt die Summen und löst $\boldsymbol{A\ a = y}$**.** Man erhält eine Regressionsfunktion.
2. **V^T**-Regression
   Damit können alle Regressionsmodelle im weiteren Sinn bearbeitet werden.
   Regressionsmodelle i.w.S. haben die Form $y(x) = a_0 + a_1\ ^3{}_1(x) + a_2\ ^3{}_2(x) + \dots + a_k\ ^3{}_k(x)$
   mit fast beliebigen Ansatzfunktionen $^3(x)$.
   Man entwickelt eine VANDERMONDE-Matrix $\boldsymbol{V}_\varphi$ und die Gleichung $\boldsymbol{V^T V a = V^T y}$ nach den Regressionskoeffizienten $\boldsymbol{a}$ auf. i = 0; 1; 2; …; k
   2.1 Regressionsfunktionen mit $k > 1$, z.B. $y(x)=a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
   2.2 Multiple Regressionen, das sind Regressionsmodelle mit mehr als eine Einflussvariable.
   z.B. $y(x)= a_0 + a_1\cdot u + a_2\cdot v + a_3\cdot x$
3. Nichtlineare Regression
   z.B. $\hat{y} = a\cdot e^{bx}$, $\hat{y} = a\cdot\sin(bx)$, $\hat{y} = a\cdot x^b$ verwenden wir nicht

Beisp. 4.11 (Regressionsmodell syn. Ansatzfunktion, Ausgleichspolynom syn. Regressionsparabel)
Fünf Punkte sind gegeben (0 | 3) (2 | 5) (3 | 5) (5 | –3) (6 | 0)
Das Ausgleichpolynom 2. Grades ist zu bestimmen, eine Regressionsparabel,
eine Funktion nach dem Regressionsmodell $y(x)=a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ist zu bestimmen.

→ *Excel / V^T-Regression*

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ & \dots & \\ 1 & x_k & x_k^2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y} \qquad \Rightarrow \qquad y = 3{,}550 + 1{,}017x - 0{,}325\,x^2$$

Mit Hilfe der Regressionsfunktion kann man die beste Schätzung für $x = 4$ bestimmen:
$y(4) = 3{,}550 + 1{,}017.4 - 0{,}325.4^2 = 2{,}418$

In Excel: Punkt aus der Punktwolke markieren, dann Rechtsklick, "Trendlinie einfügen"

Beisp. 4.12

Der Einfluss der beiden Variablen U und X auf die Größe Y soll untersucht werden. Multiple Regression.
Es liegt dazu die nebenstehende Wertetabelle vor.

u_i	x_i	y_i
100	3	142
95	2	138
102	4	167
128	6	182
125	8	191
102	9	179
124	9	190
107	10	178
119	11	194

Gesucht ist ein Regressionsfunktion nach dem multiplen Modell $y = a_0 + a_1\,u + a_2\,x$.

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & u_0 & x_0 \\ 1 & u_1 & x_1 \\ & \dots & \\ 1 & u_k & x_k \end{pmatrix} \cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y} \qquad \Rightarrow \qquad y = 60{,}802 + 0{,}767\,u + 3{,}961\,x$$

Die beste Schätzung für das Szenario $u = 110$, $x = 7$ ist
$y(110\ ;\ 7) = 60{,}802 + 0{,}767.110 + 3{,}961.7 = 172{,}86$

4.24 AUFGABE V^T-REGRESSION

Aufgabe $\mathbf{V}^{\mathbf{T}}$-Regression

Gegeben: Wertetabelle $(x_i \mid y_i)$, $(u_i \mid v_i \mid x_i \mid y_i)$ n = 5..6, Regressionsmodell
zusätzlich Wert(e) für eine Interpolation

Gesucht:
a) VANDERMONDE-Matrix für das angegebene Regressionsmodell
$y(x) = a_0 + a_1\,\varphi_1(x) + a_2\,\varphi_2(x) + \ldots + a_k\,\varphi_k(x)$
b) Gleichung der Regressionsfunktion
c) Interpolationswert y Bester Schätzwert

Schritte:
1. VANDERMONDE-Matrix für das gegebene Zahlenmaterial formulieren
2. Schema für die Lösung der Gleichung $\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\,\boldsymbol{y}$ erstellen, evtl. Vordruck benutzen
3. $\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\,\boldsymbol{y}$ nach $\boldsymbol{a}$ auflösen, bei $\boldsymbol{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}$ die Symmetrie ausnutzen.
   Das lineare Gleichungssystem mit GAUß-JORDAN-Verfahren lösen.
4. Regressionsgleichung formulieren
5. Gegebene Wert(e) für die Interpolation in die Regressionsgleichung einsetzen.

ANHANG BINOMIALENTWICKLUNG

aus: Statistik: sta5verteil.doc

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{x}$ kennen wir aus den Binomischen Formeln $(a+b)^n$.

Man entnimmt sie rekursiv aus dem PASCAL'schen Koeffizientenschema (siehe unten) oder bestimmt sie mit einer der beiden folgenden Formeln:

$$\binom{n}{x} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-x+1)}{x!} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Bei den meisten Taschenrechnern gibt es dazu die Taste [nCr]: Number of Combinations $\binom{n}{r}$

$(a+b)^0 = 1 \quad = 1\, a^0b^0$
$(a+b)^1 = a + b \quad = 1\, a^1b^0 + 1\, a^0b^1$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad = 1\, a^2b^0 + 2\, a^1b^1 + 1\, a^0b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3\, a^2b + 3\, a\, b^2 + b^3 \quad = 1\, a^3b^0 + 3\, a^2b^1 + 3\, a^1b^2 + 1\, a^0b^3$
$(a+b)^4 = \quad = 1\, a^4b^0 + 4\, a^3b^1 + 6\, a^2b^2 + 4\, a^1b^3 + 1\, a^0b^4$

Binomialkoeffizienten: $\binom{4}{x} = \binom{4}{0};\binom{4}{1};\binom{4}{2};\binom{4}{3};\binom{4}{4}$

6 a^2b^2 bedeutet, dass die Kombination a^2b^2 bei $(a+b)^4$ sechs mal vorkommt.

□ $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3\cdot \underline{|2\cdot 1\text{kürzen}}}{2\cdot 1\cdot \underline{|2\cdot 1\text{kürzen}}} = 6$ (1.Formel) $\qquad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$ (2. Formel).

mit Taschenrechner: 4[nCr]2

□ $\binom{75}{3} = \frac{75\cdot 74\cdot 73}{3\cdot 2\cdot 1} = 67525.$ 75! nicht mit Taschenrechner!