INHALT

1. Geschlossen (analytisch) lösbare Integrale mit Potenzregel, Substitution, partielle Integration oder Partialbruchzerlegung => unbestimmte Integrale (Stammfunktionen).

2. Näherungsweise Integration über unendliche Reihen: TAYLOR-Reihen und Binomialreihen sieh Abschnitte 5.1 bis 5.3 (nicht klausur-relevant)

3. In den größeren Formelsammlungen finden sich praktisch alle Integrale aus 1. und 2.

4. Computer-Algebra-Systeme (CAS-Software) wie Derive, Mathematica, Euler, Matlab, Octave enthalten formale Integration für die meisten Integrale aus 1. und 2. => unbestimmte Integrale Sie liefern auch numerische Ergebnisse mit SIMPSON-Verfahren => bestimmtes Integral

5. Mit Hilfe des SIMPSON-Verfahrens lassen sich beliebige Funktionen, auch solche, deren Funktionsgleichung unbekannt ist, mit guter Näherung integrieren.

5.0 INTEGRALTAFELN

Nr.	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	*Abkürzung:* s.S. 237
62.	$\frac{x^2}{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{2}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|-b\arctan\frac{x}{b}\right)$	
63.	$\frac{x^2}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{2}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|-\frac{b}{2}\ln\left\|\frac{b+x}{b-x}\right\|\right)$	$(a^2\neq b^2)$ $(a^2=b^2$: Nr. 53)
			Abkürzung: $z=a^3\pm x^3;\ a>0;\quad m,n\in\mathbb{R}$
64.	$\frac{1}{z}$	$\pm\frac{1}{6a^2}\left(\ln\frac{(a\pm x)^2}{a^2\mp ax+x^2}\pm 2\sqrt{3}\arctan\frac{2x\mp a}{a\sqrt{3}}\right)$	
65.	$\frac{1}{z^n}$	$\frac{1}{3(n-1)a^3}\left(\frac{x}{z^{n-1}}+(3n-4)\int\frac{dx}{z^{n-1}}\right)$	$(n\neq 1)$
66.	$\frac{x}{z}$	$\frac{1}{6a}\left(\ln\frac{a^2\mp ax+x^2}{(a\pm x)^2}\pm 2\sqrt{3}\arctan\frac{2x\mp a}{a\sqrt{3}}\right)$	
67.	$\frac{x^2}{z}$	$\pm\frac{1}{3}\ln\|z\|$	
68.	$\frac{x^n}{z}$	$\pm\frac{x^{n-2}}{n-2}\mp a^3\int\frac{x^{n-3}}{z}\,dx$	$(n\neq 2)$
69.	$\frac{1}{xz}$	$\frac{1}{3a^3}\ln\left\|\frac{x^3}{z}\right\|$	
70.	$\frac{1}{xz^n}$	$\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{3(n-1)z^{n-1}}+\int\frac{dx}{xz^{n-1}}\right)$ oder $\frac{1}{3a^{3n}}\left(\ln\left\|\frac{x^3}{z}\right\|+\sum_{\lambda=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a^3}{z}\right)^{\lambda}\right)$	$(n\neq 1)$ $(n\in\mathbb{N}^*;\ n\geq 2)$
71.	$\frac{1}{x^2z}$	$-\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{x}\pm\int\frac{x}{z}\,dx\right)$	(Nr. 66)
72.	$\frac{1}{x^mz^n}$	$\frac{1}{(m-1)a^3}\left(-\frac{1}{x^{m-1}z^{n-1}}\mp(m+3n-4)\int\frac{dx}{x^{m-3}z^n}\right)$	$(m\neq 1)$

(13) $$\int \frac{x^3\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a^4}\left(ax+b-3b\ln|ax+b| - \frac{3b^2}{ax+b} + \frac{b^3}{2(ax+b)^2}\right)$$

(14) $$\int \frac{x^3\,dx}{(ax+b)^4} = \frac{1}{a^4}\left(\ln|ax+b| + \frac{3b}{ax+b} - \frac{3b^2}{2(ax+b)^2} + \frac{b^3}{3(ax+b)^3}\right)$$

(15) $$\int \frac{x^3\,dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{(n-4)(ax+b)^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3)(ax+b)^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} + \frac{b^3}{(n-1)(ax+b)^{n-1}}\right) \qquad n \in \mathbb{R} \setminus \{1;2;3;4\}$$

(16) $$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| \qquad b \neq 0$$

(17) $$\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = -\frac{1}{b^2}\left(\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| - \frac{b}{ax+b}\right) \qquad b \neq 0$$

(18) $$\int \frac{dx}{x(ax+b)^3} = -\frac{1}{b^3}\left(\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + \frac{2ax}{ax+b} - \frac{a^2x^2}{2(ax+b)^2}\right) \qquad b \neq 0$$

(19) $$\int \frac{dx}{x(ax+b)^n} = -\frac{1}{b^n}\left(\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| - \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}\frac{(-a)^i x^i}{i(ax+b)^i}\right) \qquad n \geq 1$$

(20) $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| \qquad b \neq 0$$

(21) $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -\frac{a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2x} + \frac{2a}{b^3}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| \qquad b \neq 0$$

(22) $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^3} = -\frac{a}{2b^2(ax+b)^2} - \frac{2a}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3x} + \frac{3a}{b^4}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|$$

(23) $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^n} = -\frac{1}{b^{n+1}}\left(-\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)(ax+b)^{i-1}} + \frac{ax+b}{x} - na\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|\right) \qquad n \geq 2$$

(24) $$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)} = -\frac{1}{b^3}\left(a^2\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| - \frac{2a(ax+b)}{x} + \frac{(ax+b)^2}{2x^2}\right)$$

(25) $$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^2} = -\frac{1}{b^4}\left(3a^2\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + \frac{a^3x}{ax+b} + \frac{(ax+b)^2}{2x^2} - \frac{3a(ax+b)}{x}\right)$$

(26) $$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^3} = -\frac{1}{b^5}\left(6a^2\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + \frac{4a^3x}{ax+b} - \frac{a^4x^2}{2(ax+b)^2} + \frac{(ax+b)^2}{2x^2} - \frac{4a(ax+b)}{x}\right)$$

5.1 Potenzreihen

Die Integration kann für viele wichtige Funktionsklassen nicht geschlossen durchgeführt werden.

z.B. für die Integranden e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\sqrt{1+x^3}$, $\frac{e^x}{x}$, $\sin x^2$, $\frac{1}{x\cdot e^x}$, $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

Ein Teil dieser Funktionen lassen sich als Potenzreihen entwickeln.
Diese lassen sich dann integrieren.

Potenzreihen am Entwicklungspunkt x_0 haben die Form $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$$

In Taylor-Reihen werden die a_k mit Ableitungen $f^{(k)}$ entwickelt: $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

In MacLaurin-Reihen ist der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$: $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k$$

ausgeschrieben $$f(x)=\frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k+\ldots$$

[Taylor, Brook, Cambridge, GB 1712] [MacLaurin, Colin, Edinburgh 1742]

für $f(x) = \sin x$ $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0)=\cos 0 = 1$, $f''(0) = -\sin 0 = 0$, $f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$$f(x)=\sin x=\frac{1}{1!}\cdot x+\frac{-1}{3!}\cdot x^3+\frac{1}{5!}\cdot x^5-+\ldots=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+-\ldots$$

Auch die Binomialreihe lässt sich auf diese Weise entwickeln:

$f(x) = (a+x)^n$.	$f(0) = a^n$
$f'(x) = n\,(a+x)^{n-1}$.	$f'(0) = n\,a^{n-1}$
$f''(x) = n\,(n-1)\,(a+x)^{n-2}$.	$f''(0) = n\,(n-1)\,a^{n-2}$
$f'''(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,(a+x)^{n-3}$.	$f'''(0) = n\,(n-1)\,(n-2)\,a^{n-3}$

…

$f^{(k)}(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+1)\,a^{n-k}$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}$$ sind die Binomialkoeffizienten

Binomialreihe: $$(a+x)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}x^k+\ldots$$

Ein wichtiger Sonderfall entsteht mit $a = 1$:

Binomialreihe: $$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{k}x^k+\ldots$$

z.B. $$(1+x)^3=1+\frac{3}{1!}x+\frac{3\cdot(3-1)}{2!}x^2+\frac{3\cdot(3-1)(3-2)}{3!}x^3=1+3x+3x^2+x^3$$

Das geht auch mit gebrochenen Exponenten n:

$$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}x^4+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+-\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5-+\ldots$$ konvergent für $|x|<1$

5.2 Integration mit Potenzreihen

Beisp. 5.1 Es ist zu bestimmen $\int_0^{0{,}655} \sqrt{1+x^3}\,dx$

Eine geschlossene Lösung ist nicht möglich. Der Integrand wird in eine Reihe entwickelt.

Die Binomialreihe $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5-+\ldots$ ist gegeben.

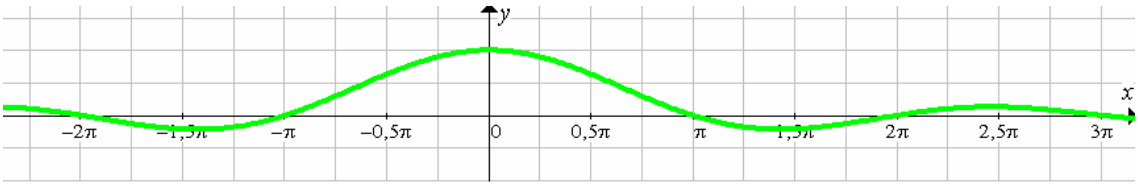
Man setzt im Ausdruck $(1+z)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+z}$ $\quad z = x^3$ und erhält

$$\int_0^{0{,}655} \sqrt{1+x^3}\,dx = \int_0^{0{,}655} \left(1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{16}x^9-\frac{5}{128}x^{12}+-\ldots\right)dx$$

$$= \left[x+\frac{x^4}{8}-\frac{x^7}{56}+\frac{x^{10}}{160}-\frac{x^{13}}{1664}\right]_0^{0{,}655} = 0{,}655+\frac{0{,}655^4}{8}-\frac{0{,}655^7}{56}+\frac{0{,}655^{10}}{160}+\frac{0{,}655^{13}}{1664}$$

$$= 0{,}655+0{,}023008-0{,}000924+0{,}000091-0{,}000002-(0) = 0{,}677$$

Beisp. 5.2 Es ist zu bestimmen $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$



$\int_0^{x_2} \frac{\sin x}{x}\,dx = Si(x_2)$ nennt man Integralsinus

Eine geschlossene Lösung ist nicht möglich. Der Integrand wird in eine Reihe entwickelt.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+-\ldots$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\cdot\sin x = 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+\frac{x^8}{9!}-+\ldots$$

Man erkennt nebenbei:

a) Mit dieser Entwicklung ist auch f(0) = 1 gegeben,

Mit Regel von de L'Hospital auch $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$

b) Eine Polynomfunktion mit ausschließlich geraden Exponenten, also symmetrisch zur y-Achse, es genügt zu rechnen $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$

$$2\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = 2\left[x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+-\ldots\right]_0^{\pi} = 2\left(\pi-\frac{\pi^3}{18}+\frac{\pi^5}{600}-\frac{\pi^7}{35280}+\frac{\pi^9}{3265920}-+\ldots\right)$$

= 2·(3,14159 – 1,72256 + 0,51003 – 0,08561 + 0,00913 – 0,00067 + 0,00004 – (0))
= 3,704

5.3 Aufgabe Reihe-Int

Beisp. 5.3 Eine der wichtigsten Funktionen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Fehlerintegral von Gauß: $\Phi(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$

(Normalverteilung, Gaußsche Glockenkurve)
Die Integralwerte Æ(x_2) sind in allen Tabellensammlungen aufgelistet.
Eine geschlossene Lösung ist nicht möglich.
Der Integrand lässt sich als Reihe darstellen.

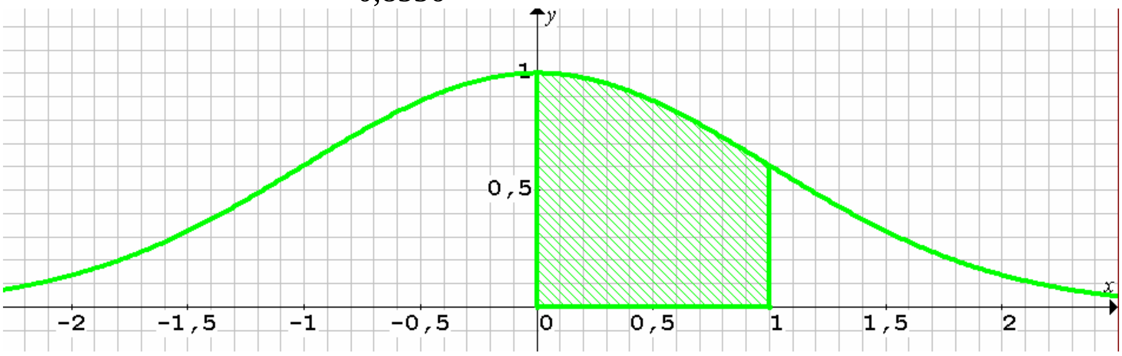
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

setzt man $z = -\frac{1}{2}x^2$ ergibt sich $e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4\cdot 2!} - \frac{x^6}{8\cdot 3!} + \frac{x^8}{16\cdot 4!} + \ldots$

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - \frac{x^{10}}{3840} + \frac{x^{12}}{46080} - + \ldots\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \frac{x^9}{3456} - \frac{x^{11}}{42240} + \frac{x^{13}}{599040} - + \ldots \right]_0^1$$

= 1 – 0,16667 + 0,025 – 0,00298 + 0,00029 – 0,00002 – (0)
= 0,8556



Aufgabe Reihe-Int

Gegeben: Zu integrierende Funktion, Integrationsgrenzen x_1, x_2
Hinweis auf Reihenentwicklung

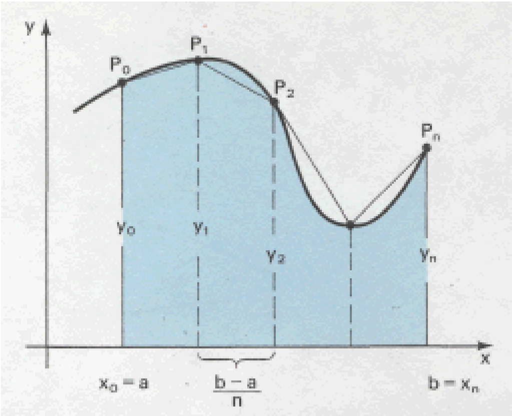
Gesucht: Bestimmtes Integral $F(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

Schritte:
1. Potenzreihe durch Substitution mit Hilfsvariable z entwickeln oder gegebene Reihe benutzen.
   Die Potenzreihen sind entweder leicht herleitbar oder gegeben.
2. Potenzreihe integrieren.
3. Integral auswerten $[F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$.

5.4 NUMERISCHE INTEGRATION

Numerische Integration verwendet man, wenn

a) die analytische Bestimmung einer Stammfunktion unmöglich ist (siehe Abschnitt 5.1),
b) die analytische Bestimmung einer Stammfunktion zu aufwendig ist,
c) die Entwicklung von Potenzreihen unmöglich oder zu aufwendig ist,
d) die Funktionen in Form einer Messreihe (x_i , y_i) gegeben sind statt in Funktionsgleichungen.



Zur Bestimmung des Flächeninhalts $A = \int_a^b f(x)\,dx$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$

zerlegen wir das Intervall $[a , b]$ in n gleiche Teilabschnitte $h = \dfrac{b-a}{n}$

mit den Stützstellen $x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_n = b$.
Die Punkte $P_0\,(x_0 \mid y_0)$, $P_1\,(x_1 \mid y_1)$, … , $P_n\,(x_n \mid y_n)$ verbindet man mit Sehnen zu einem Polygonzug. Die Streifen zwischen den Sehnen und der x-Achse sind Trapeze mit den

Flächeninhalten $\dfrac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot h$

insgesamt $A \approx h \cdot \dfrac{y_o + y_1}{2} + h \cdot \dfrac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + h \cdot \dfrac{y_{n-1} + y_n}{2}$

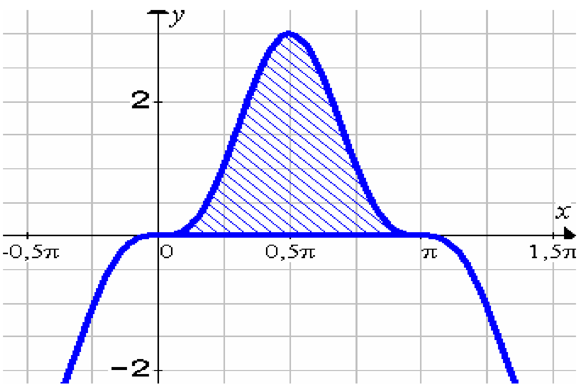
Sehnen-Trapez-Regel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \dfrac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$

Beisp. 5.4 Sehnen-Trapez-Verfahren $\sin^3 x = (\sin x)^3$ n $\sin x^3$

Es ist zu bestimmen $\int_0^{\pi} 3\sin^3 x\,dx = 3\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$ mit $n = 12$ $\Rightarrow h = \dfrac{\pi - 0}{12} = 0{,}2618$

$$A \approx 3 \cdot \frac{0{,}2618}{2} \cdot (\sin^3 0 + 2 \cdot \sin^3(0{,}2618) + 2 \cdot \sin^3(2 \cdot 0{,}2618) + \ldots + \sin^3(\pi)) = 4{,}0002$$

→ *Excel / Simpson*

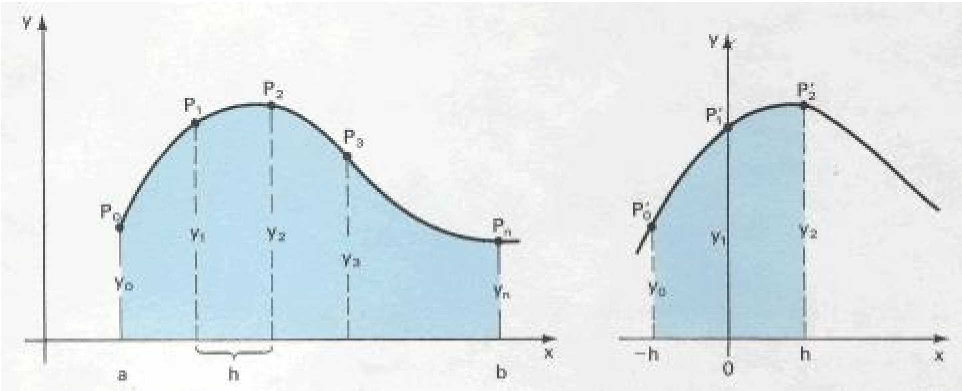


exakt
A = 4,0 cm²

$A_{\text{Trapez}} =$ …

5.5 KEPLER'sche Fassregel

Bei der Sehnen-Trapez-Regel wurde der Funktionsgraph der Funktion f durch einen Streckenzug, also durch lineare Funktionen approximiert.
Wenn man den Funktionsgraph durch Parabelstücke, also mit quadratischen Funktionen $f^*(x)$ annähert, erhält man einen Näherungswert A* für $A = \int_a^b f(x)\,dx$ mit $x \in [a\,, b]$ mit weniger Unterteilungen n oder/und geringerem Fehler ε.



Jeweils drei aufeinanderfolgende Punkte P_0, P_1, P_2, dann P_2, P_3, P_4 usw. bis P_{n-2}, P_{n-1}, P_n bestimmen ein Parabelstück. Zur Vereinfachung der Rechnung verschieben wir die Funktion parallel zur x-Achse, so dass P_1 auf der y-Achse liegt. Der Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse bleibt bei dieser Verschiebung unverändert..

Die ersten drei Punkte sind $P_0\,(-h \mid y_0)$, $P_1\,(0 \mid y_1)$, $P_2\,(h \mid y_2)$.
Für Parabeln gilt der Ansatz $y = a\,x^2 + b\,x + c$.
Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1 = c \\ y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c \\ y_2 = a\,h^2 + b\,h + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = a\,h^2 - b\,h + y_1 & ❶ \\ y_2 = a\,h^2 + b\,h + y_1 & ❷ \end{cases}$$

Addition ❶+❷ $\Rightarrow y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2y_1 \Rightarrow y_0 - 2y_1 + y_2 = 2ah^2 \Rightarrow a = \dfrac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}$

Subtraktion ❷–❶ $\Rightarrow y_2 - y_0 = 2bh \Rightarrow b = \dfrac{y_2 - y_0}{2h}$

Die Gleichung der quadratischen Näherungsfunktion für den ersten Streifen $[-h\,;\,h]$ ist dann:

$$f^*(x) = y = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}\cdot x^2 + \frac{y_2 - y_0}{2h}\cdot x + y_1$$

Aus der Integration von $f^*(x)$ ergibt sich der Inhalt des ersten Streifens A_1.

$$A_1 \approx \int_{-h}^{h} f^*(x)\,dx = \left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{3\cdot 2h^2}\cdot x^3 + \frac{y_2 - y_0}{2\cdot 2h}\cdot x^2 + y_1\cdot x\right]_{-h}^{h}$$

$$= \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{3\cdot 2h^2}\cdot\left(h^3 - \left(-h^3\right)\right) + \frac{y_2 - y_0}{2\cdot 2h}\cdot\left(h^2 - h^2\right) + y_1\cdot\left(h - (-h)\right)$$

$$= \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{3}\cdot h + 2y_1 h = \frac{(y_0 - 2y_1 + y_2)h + 6y_1 h}{3} = \frac{h}{3}\cdot\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Den Ausdruck $A_1 \approx \dfrac{h}{3}\cdot\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$ nennt man KEPLER'sche Fassregel.

[KEPLER, Johannes, Linz, 1615]

5.6 SIMPSON-VERFAHREN

Die KEPLER'sche Fassregel liefert den Näherungswert für den Flächeninhalt eines Streifens.

Die Summe der Streifen-Inhalte ist der Näherungswert für $A=\int_a^b f(x)\,dx$ mit $x\in[a\,,b]$

$$A^*=\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+\frac{h}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

$$A^*=\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0+y_n+4(y_1+y_3+y_5+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})\right]$$

$$\approx\frac{h}{3}\left((y_0+y_n)+4\sum_{k=1}^{n-1}y_{2k-1}+2\sum_{k=1}^{n-2}y_{2k}\right)=\frac{h}{3}\left(S_{0,n}+4\cdot S_{ungerade}+2\cdot S_{gerade}\right)$$

für stetige Intervalle $x\in[a\,,b]$ und $h=\frac{b-a}{n}$

Diesen Ausdruck nennt man SIMPSON-Regel. [SIMPSON, Thomas, London 1743]

Bemerkungen:

1. In einem Rechenschema ermittelt man die drei Summen $S_{0,n}$, $S_{ungerade}$, S_{gerade}.
2. Enthält die Funktion Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen) oder Nullstellen, dann ist die Intervallteilung so zu wählen, dass diese Punkte Anfang oder Ende eines Streifens bilden.
3. Die Anzahl der Streifen *n* muss geradzahlig sein, die Anzahl der y-Werte (Stützstellen) *n*+1 ist dann ungerade, die Anzahl der Parabelstücke ist *n*/2.

Beisp. 5.5 Integration mit SIMPSON-Verfahren

Das Integral $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$ ist näherungsweise mit Hilfe der SIMPSON-Regel zu bestimmen.

Die Rechnung soll mit $n = 8$ und mit $n = 10$ Teilintervallen durchgeführt werden.
es sollen Angaben zur Genauigkeit des Ergebnisses gemacht werden.

→ *Excel / Simpson*

Man kann zeigen, dass für den Verfahrensfehler gilt:

$$\boxed{\varepsilon=\frac{(x_n-x_0)^5}{180n^4}\cdot f^{(4)}(w) \quad \text{mit } x_0<w<x_n}$$

Die 4. Ableitung $f^{(4)}$ für $\frac{e^x}{x}$ ergibt sich nach aufwendiger Rechnung:

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)^{(4)}=\frac{e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)}{x^5}$$

hier: $\varepsilon=\frac{(2-1)^5}{180\cdot10^4}\cdot\frac{e^{1,5}\left(1,5^4-4\cdot1,5^3+12\cdot1,5^2-24\cdot1,5+24\right)}{1,5^5}=1,634\cdot10^{-5}$

Einfacher sind Fehlerabschätzungen und Abbruchbedingungen der Form

$$|A_n-A_{2n}|<\varepsilon \qquad \text{oder} \qquad |A_n-A_{n+2}|<\varepsilon$$

In unserem Beispiel ist $|A_8-A_{10}|=|3,0591249-3,0591200|=0,0000049$

5.7 SIMPSON-VERFAHREN BEI WERTETABELLEN

Beisp. 5.6 Integration bei einer Wertetabelle

Eine Funktion sei nicht durch eine Funktionsgleichung sondern durch 9 Messwerte gegeben.
9 Messwerte (Stützstellen) $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_8)$, also 8 Streifen, n = 8

→ *Excel / Simpson*

Aufgabe SIMPSON

Gegeben: Zu integrierende Funktion als Funktionsgleichung oder als Wertetabelle.
Anzahl der Streifen *n* oder Anzahl der Punkte (Stützstellen, Messwerte) *n*+1.

Gesucht: Näherungswert des Integrals $A = \int_a^b f(x)\,dx$ mit Hilfe der SIMPSON-Regel.

Drei Nachkommastellen bei den Zwischenrechnungen.

Schritte:
1. Arbeitstabelle erstellen, z.B. mit den Spalten k x_k y_k
2. Summen $S_{0,n}$, $S_{ungerade}$, S_{gerade} bilden
3. Gesamtsumme bilden, mit *h*/3 multiplizieren.

Beispiele aus der Physik

Geleistete Arbeit (Drehmoment) W, Verschiebung *s* gegen die Kraft *F*: $W = \int_a^b F\,ds$

Kinetische Energie, Masse *m*, Geschwindigkeit *v* : $W = \int_a^b mv\,dv = \frac{1}{2}mv^2$

Trägheitsmoment *I*, Massenelemente dm_j, Abstände von Drehachse r_j : $I = \int r^2\,dm$

Thermodynamische Energie *W* (Wärmekapazität), Druck *p*, Volumen *V* : $W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$

Elektrischer Kraftfluss Æ, Feldstärke *E*, Flächenelemente d*A* : $\Phi = \int E\,dA$

Beispiele aus der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $W(Z \le z) = F_{SN}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$

Wahrscheinlichkeiten der Normalverteilung $W(X \le x_2) = F_{\mathrm{Norm}|\mu,\sigma}(x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx$

Gamma-Faktoren der Chi^2-Verteilung $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1}\,dt$

5.8 Differentialgleichungen

Gleichungen, in denen neben den Variablen *x* und *y* auch die Ableitungen y', y'',… vorkommen, nennt man Differentialgleichungen. Differentialgleichungen entstehen, wo marginale Änderungen und Änderungstendenzen $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}y^2}$ gemessen und funktionale Zusammenhänge zwischen den Größen x, y, y', y'' erkannt werden.

Das gibt es in der Steuerungs- und Regeltechnik, bei der Reaktionskinetik in Verfahrenstechnik, Chemie und Pharmakologie, bei Wachstumsmodellen, bei Schwingungen und Wellen usw.

a) Einschaltvorgang für einen Stromkreis mit der Gleichspannung *U*, der Induktivität *L* und dem Gesamtwiderstand *R* wird beschrieben durch

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L} I = \frac{U}{L} \quad \text{mit } y = I(t) \text{ wird daraus: } \; y' + \frac{R}{L} y = \frac{U}{L}$$

b) Bei einem Pendel der Länge s und der Punktmasse m, die aus der Nulllage um den Winkel φ ausgelenkt wird, gilt bei Kräftegleichgewicht

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{s}\sin\varphi \quad \text{und mit } y = \varphi \text{ wird daraus } \; y'' = -\frac{g}{s}\sin y$$

c) $y^{(k)}(x) = g(x; y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung k-ter Ordnung.
Die "nicht-gewöhnliche" Differentialgleichungen heißen partielle Differentialgleichungen, sie enthalten mehrere Variable und partielle Ableitungen.

- Eindimensionale Wellengleichung mit der Phasengeschwindigkeit *v*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = 0$$

d) $y' - 3x^2 y = 1$ ist eine lineare Differentialgleichung 1.Ordnung,
weil *y* und y' in der 1.Potenz stehen und nicht miteinander multipliziert werden.
Allgemein gilt für lineare Differentialgleichungen $y' + a(x)\,y = b(x)$. (b + m x = y)
Nur solche Differentialgleichungen untersuchen wir näher.

$y' - 3x^2 y = 0$ ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1.Ordnung, weil $b(x) = 0$.
$y'' = c \sin y$ ist eine nicht-lineare Differentialgleichung 2.Ordnung.

e) Das Verhalten verflochtener Systeme wird mit einem System von Differentialgleichungen beschrieben, z.B.

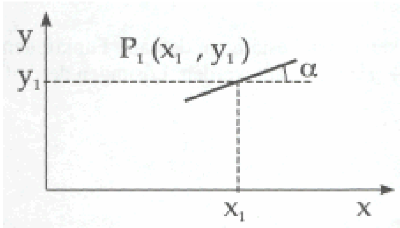
$$\begin{cases} y_1' = -0{,}1xy_1 + 100y_2y_3 \\ y_2' = 0{,}1y_1 - 100y_2y_3 - 500xy_2^2 \\ y_3' = 500y_2^2 - 0{,}5y_3 \end{cases}$$

Normalerweise sucht man die in der Differentialgleichung versteckte Funktionsgleichung $y = f(x)$.
Eine Differentialgleichung "lösen", heißt die Funktionsgleichung $y = f(x)$ bestimmen.
In günstigen Fällen kann man dies analytisch geschlossen durch Integration erreichen.
In der Regel ist man aber auf numerische Lösungsmethoden angewiesen.

5.9 Richtungsfelder

Einfache Differentialgleichungen können auf x-y-Koordinatenebenen graphisch dargestellt werden. Durch die Differentialgleichung $y' = g(x, y)$ wird in jedem Trägerpunkt $P(x_1 \mid y_1)$ ein Linienelement (x_1, y_1, y_1') definiert.

Ein Linienelement ist ein Geradenstück mit der Steigung y_1'.
Jedes Wertetripel (x_1, y_1, y_1') bestimmt ein Linienelement.
Insgesamt ergibt sich ein Richtungsfeld.

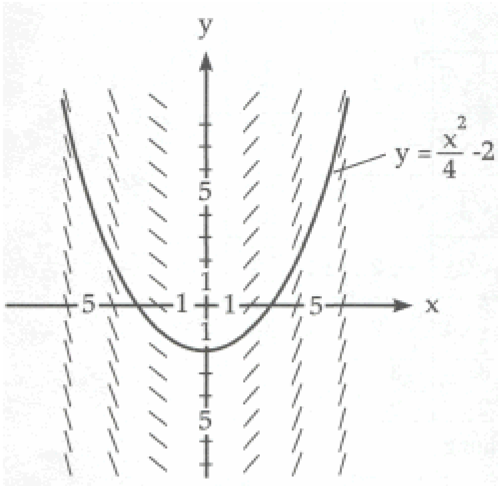


Beisp. 5.7 Differentialgleichung $y' = ½\, x$

Hier werden die Linienelemente nur durch die Variable x bestimmt.
Für $x = 2$ ergeben sich die Trägerpunkte (2 | y) mit den Steigungen y'(1) = 1 = tan 45°.
Für $x = –5$ ergeben sich die Trägerpunkte (–5 | y) mit den Steigungen y'(–5) = –2,5 c 112°.
Man erkennt die Charakteristik einer zur y-Achse symmetrischen Parabel.
Die Rechnung ergibt

$$y' = \frac{1}{2}x \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{2}x dx \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{4}x^2 + C$$

Es ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.



Mit einem Anfangswert, z.B. P (0| –2) ergibt sich die spezielle Lösung $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$

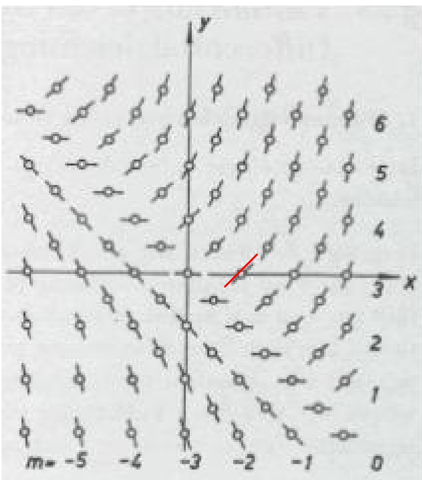
Allgemein: Der Funktionsgraph, der auf das Richtungsfeld der Differentialgleichung passt, gehört zu der gesuchten Funktion, der Lösung $y = f(x)$.

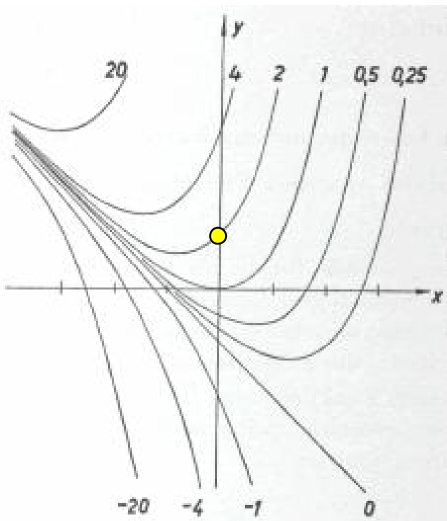
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in einfachster Form: $y = \int y'(x)\, dx = \int \frac{dy}{dx}\, dx$

Beisp. 5.8 Differentialgleichung $y' = x + y$

Der Punkt P(1 | 0) hat ein Linienelement mit y' = 1,

x	y	y'
1	0	1
1	1	2
1	2	3
–1	0	–1
–3	–1	–4
2	2	4





Nach aufwendiger Rechnung ergibt sich als allgemeine Lösung $y = c\, e^x - x - 1$.
Die spezielle Lösung für den Anfangswert P_0 (0 | 1) ergibt sich aus $1 = c\, e^0 - 0 - 1$
p $c = 2$ und damit $y = 2\, e^x - x - 1$.

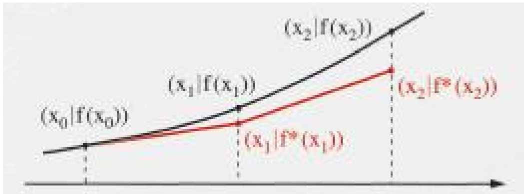
5.10 EULER-CAUCHY-Verfahren

Die numerische Lösung einer Differentialgleichung führt zu Näherungswerten $f^*(x_k) = y_k$
für die unbekannte Lösung $y = f(x)$ der Differentialgleichung.

Man zerlegt den Kurvenverlauf mit der Schrittweite h in lineare Strecken (Polygonzug).
An den Stützstellen $x_k = x_0 + k\,h$ mit $k = 0, 1, 2 \ldots$ ermittelt man die Näherungswerte y_k .
Zur Bestimmung des Näherungswertes y_{k+1} wird die unbekannte Lösungskurve durch die Tangente im vorigen Punkt $(x_k \mid y_k)$ ersetzt.

Hat eine Funktion f an der Stelle x_0 die Ableitung $f\,'(x_0)$, dann gilt für $x \to x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f\,'(x)$$ und die lokale Näherung



$$f^*(x) = f(x_0) + f\,'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Nach Umindexierung und $h = x_2 - x_1$

$$f^*(x_2) = f^*(x_1) + f^{*\prime}(x_1)\cdot h \qquad \text{oder}$$

$$y_2 = y_1 + y_1' \cdot h$$

$$y_{k+1} = y_k + y_k' \cdot h \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dieses Näherungsverfahren nennt man Polygonzugverfahren nach EULER-CAUCHY. (1768)

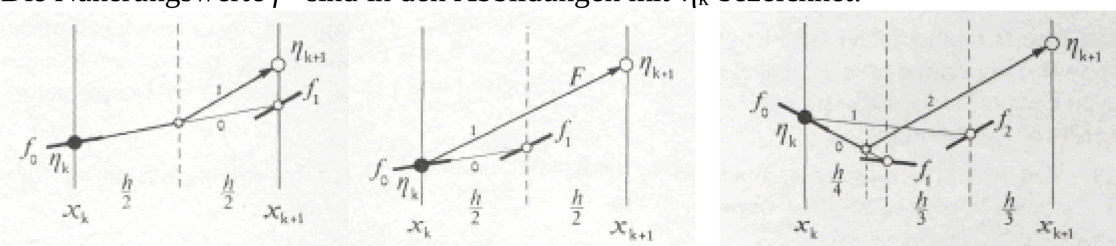
Weiter Beisp. 5.8 Differentialgleichung $y' = x + y$

Zu lösen sei die Differentialgleichung $y' = x + y$ für die Anfangsbedingung $x_0 = 0$, $y_0 = 1$,
im Intervall $[0\,;\ 0{,}6]$ mit der Schrittweite $h = 0{,}1$.
d.h. Bestimmen Sie die Näherungswerte y_k. → *Excel / Runge-Kutta*

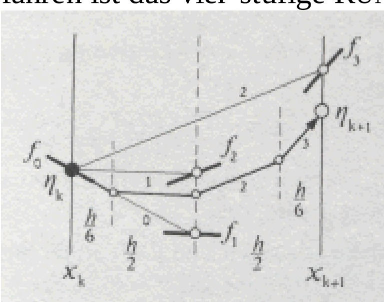
Die exakte Lösung $y = 2e^x - x - 1$ ist zum Vergleich hinzugefügt.
Man erkennt, dass die Abweichung $| f^*(x) - f_{exakt}(x) |$ mit zunehmender Entfernung von $(x_0 \mid y_0)$ größer wird. Damit ist das EULER-CAUCHY-Verfahren in dieser Form zum Lösen von Differentialgleichungen ungeeignet.

Es gibt eine Reihe von Verbesserungen dieses Verfahrens von EULER-CAUCHY.
Man möchte damit eine starke Verringerung des Fehlers $| f^*(x) - f_{exakt}(x)|$ erreichen,
etwa auf die Fehlerordnung h^5
d.h. dass sich der Fehler $| f^*(x) - f_{exakt}(x)|$ mit der 5.Potenz der Schrittweite h ändert.

Dazu wird die Schrittweite h in Abschnitte zerlegt und für die Teilpunkte werden entsprechende Zwischenwerte f^* berechnet.
Die Näherungswerte f^* sind in den Abbildungen mit η_k bezeichnet.

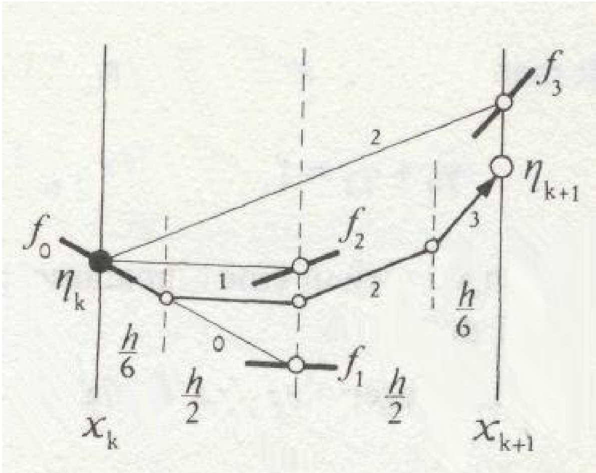


Das bekannteste Verfahren ist das vier-stufige RUNGE-KUTTA-Verfahren. (1895)



5.11 RUNGE-KUTTA-VERFAHREN

Zur Lösung der Differentialgleichung $y' = g(x, y)$ wird wieder ein Streckenzug konstruiert.



Die Schrittweite h wird in vier Teilintervalle zerlegt.

Die Zerlegung erfolgt im Verhältnis 1 : 2 : 2 : 1 oder $\frac{1}{6}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$

Für die Stellen x_k , $x_k + h/2$, $x_k + h/2$ und $x_k + h$ werden vier Zwischenwerte w_i gebildet, damit erreicht das Verfahren insgesamt eine Fehlerordnung von h^5.

Für jeden Schritt x_k sind also vier Zwischenwerte w_1, w_2, w_3, w_4 zu berechnen.

$$w_1 = g(x_k, y_k)$$
$$w_2 = g\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\cdot w_1\right)$$
$$w_3 = g\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\cdot w_2\right)$$
$$w_4 = g\left(x_k + h, y_k + h\cdot w_3\right)$$

speziell mit y' = g(x, y):

$$w_1 = \text{Steigung } y' \text{ am Punkt } (x_k \mid y_k)$$
$$w_2 = \text{Steigung } y' \text{ am Punkt} \left(x_k + \frac{h}{2} \;\middle|\; y_k + \frac{h}{2}\cdot w_1\right)$$
$$w_3 = \text{Steigung } y' \text{ am Punkt} \left(x_k + \frac{h}{2} \;\middle|\; y_k + \frac{h}{2}\cdot w_2\right)$$
$$w_4 = \text{Steigung } y' \text{ am Punkt} \left(x_k + h \;\middle|\; y_k + h\cdot w_3\right)$$

Aus diesen ergibt sich durch Gewichtung im Verhältnis 1 : 2 : 2 : 1 ein gemittelter Wert W.

$W = (w_1 + 2\,w_2 + 2\,w_3 + w_4\ ) / 6$

Die nächste Näherung ermittelt man mit $y_{k+1} = y_k + W.h$.

Weiter Beisp. 5.8 Differentialgleichung $y' = x + y$ mit RUNGE-KUTTA-Verfahren

Zu lösen sei die Differentialgleichung $y' = x + y$
für die Anfangsbedingung $x_0 = 0,\ y_0 = 1$,
im Intervall [0 ; 0,6] mit der Schrittweite $h = 0{,}1$.
Es sind also die Näherungswerte y_k zu bestimmen.

→ *Excel / Runge-Kutta*

Die exakte Lösung $y = 2e^x - x - 1$ ist zum Vergleich hinzugefügt.
Man erkennt die hohe Genauigkeit der Annäherung.
Der zu erwartende Fehler ist $\varepsilon < h^5$, hier also $\varepsilon < 0{,}1^5 = 0{,}00001$.
Bei h = 0,2 => $^2 < 0{,}2^5$ $^2 < 0{,}0003$

5.12 Aufgabe Runge-Kutta

Aufgabe Runge-Kutta

Gegeben: Differentialgleichung $y' = g(x, y)$, Anfangsbedingung $(x_0 \mid y_0)$
Intervall $[x_0 ; x_k]$, Schrittweite h.

Gesucht: Näherungswerte y_k im gegebenen Intervall

Schritte:
1. Rechenschema erstellen, eventuell Vordruck benutzen
2. Für jede Schrittweite h die vier Zwischenwerte w_i und den mittleren gewichteten Wert W bestimmen; und den nächsten Näherungswert mit $y_{k+1} = y_k + h\,W$ berechnen.
3. Weiter mit Schleifenanfang (2.) bis das Ende des gegebenen Intervalls erreicht ist.
4. Fehler $\varepsilon < h^5$.

Formelapparat:

$$w_1 = g(x_k, y_k)$$

$$w_2 = g\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot w_1\right)$$

$$w_3 = g\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot w_2\right)$$

$$w_4 = g\left(x_k + h, y_k + h \cdot w_3\right)$$

––––––––––––––––––––

$$W = \left(w_1 + 2\,w_2 + 2\,w_3 + w_4\right) / 6$$

$$y_{k+1} = y_k + h\,W$$

Rechenschema:

	x_k	y_k	$y_k' = w_i$	
0				
$h/2$				
$h/2$				
h				W
0	⋮	⋮	⋮	⋮