Math. II, Numerik, Uebung 2, Termin 25.10.2012

1-Eigenvektoren, 2-Eigenwerte, 3-Simplex, 4-Zwei-Phasen

ALLGEMEINES

Detaillierter Bewertungsbogen auf der Rückseite des Deckblatts

1. Nur Verfahren der angewandten Mathematik anwenden, auch wenn die Übungsaufgaben so "klein" sind, dass man sie mit elementaren Methoden lösen kann.

2. Drei Nachkommastellen bei Zwischenergebnissen,
   Endergebnisse auf zwei Nachkommastellen bzw. sinnvoll auf ganze Zahlen.
   Bei Endergebnissen auch Einheiten angeben, hier z.B. "kg", "Stück", "Geldeinheiten" u.ä.

3. Symbolik: Nullmatrix $\boldsymbol{O}$ oder "Nullmatrix" hinschreiben

AUFGABE 1 10 PUNKTE

Bestimmen Sie mit Hilfe des FADDEJEW-Verfahrens zur Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -0{,}5 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

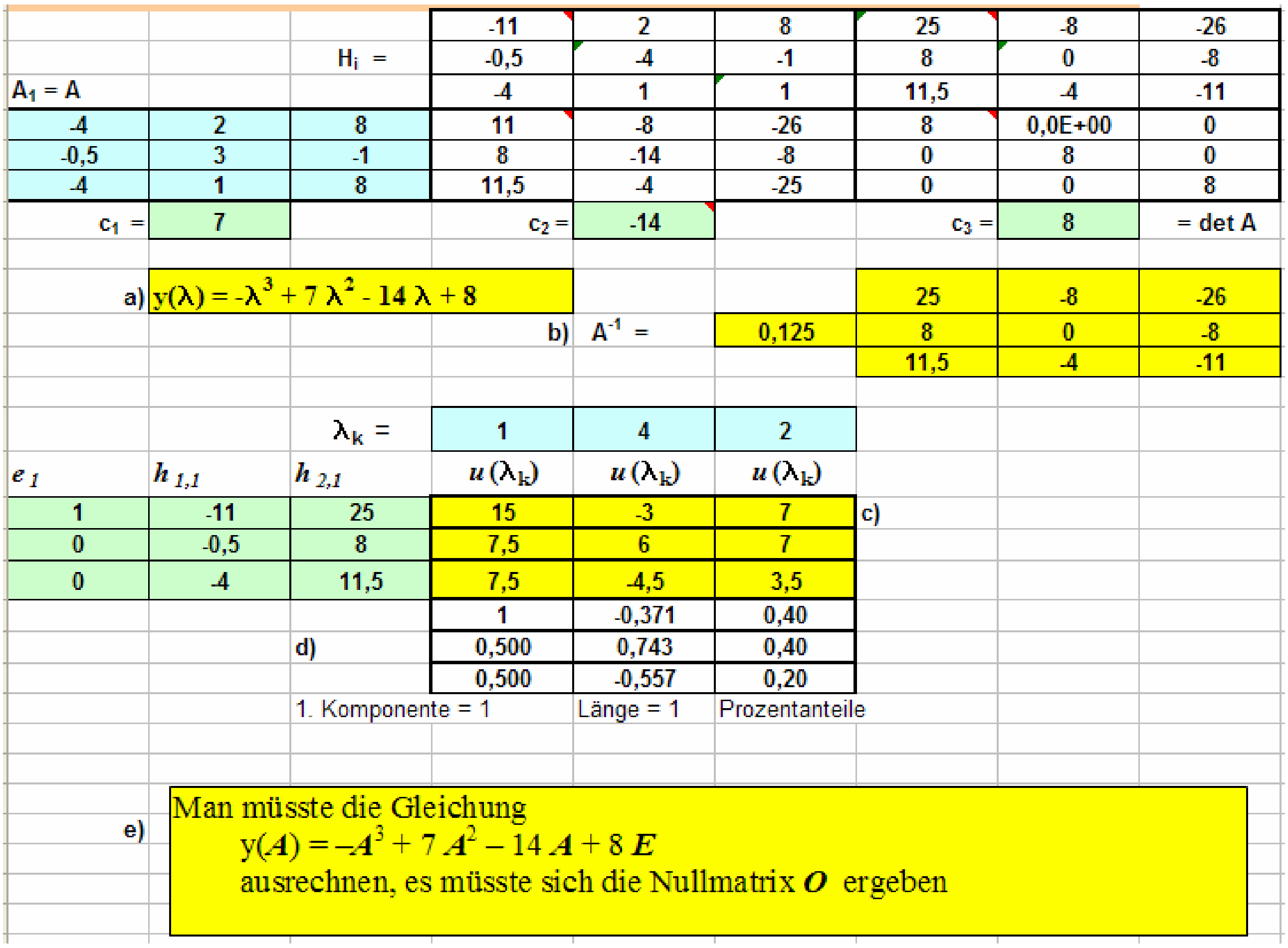
a) das charakteristische Polynom. 3,5 P.

b) die inverse Matrix und die Determinante. 1 P.

c) Die Eigenwerte der Matrix sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$.
Bestimmen Sie die Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten. 3 P.

d) Normieren Sie die Eigenvektoren:
Normieren Sie die Eigenvektor $\boldsymbol{u}_1$ so, dass dessen erste Komponente eins ist. 0,5 P.
Normieren Sie die Eigenvektor $\boldsymbol{u}_2$ so, dass dessen Länge eins ist. 0,5 P.
Normieren Sie die Eigenvektor $\boldsymbol{u}_3$ so, dass man die Prozentanteile erkennen kann. 0,5 P.

e) Wie könnte man rechnerisch zeigen, dass die Matrix $\boldsymbol{A}$ ihre eigenes charakteristisches Polynom erfüllt? (Satz von CAYLEY-HAMILTON)
Geben Sie die entsprechende Gleichung an. 1 P.



			-11	2	8	25	-8	-26
		H_i =	-0,5	-4	-1	8	0	-8
$A_1 = A$			-4	1	1	11,5	-4	-11
-4	2	8	11	-8	-26	8	0,0E+00	0
-0,5	3	-1	8	-14	-8	0	8	0
-4	1	8	11,5	-4	-25	0	0	8
c_1 =	7		c_2 =	-14		c_3 =	8	= det A
a)	$y(\lambda) = -\lambda^3 + 7\,\lambda^2 - 14\,\lambda + 8$					25	-8	-26
			b)	A^{-1} =	0,125	8	0	-8
						11,5	-4	-11
		λ_k =	1	4	2			
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{h}_{1,1}$	$\boldsymbol{h}_{2,1}$	$\boldsymbol{u}(\lambda_k)$	$\boldsymbol{u}(\lambda_k)$	$\boldsymbol{u}(\lambda_k)$			
1	-11	25	15	-3	7	c)		
0	-0,5	8	7,5	6	7			
0	-4	11,5	7,5	-4,5	3,5			
			1	-0,371	0,40			
		d)	0,500	0,743	0,40			
			0,500	-0,557	0,20			
		1. Komponente = 1		Länge = 1	Prozentanteile			

e) Man müsste die Gleichung
$$y(\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}^3 + 7\,\boldsymbol{A}^2 - 14\,\boldsymbol{A} + 8\,\boldsymbol{E}$$
ausrechnen, es müsste sich die Nullmatrix $\boldsymbol{O}$ ergeben

$$y(\lambda) = (-1)^{n+1}\,[-\lambda^n + c_1\,\lambda^{n-1} + c_2\,\lambda^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\,\lambda + c_n\,]$$

$$\boldsymbol{u}_{k,1} = \lambda_k^{n-1}\boldsymbol{e}_1 + \lambda_k^{n-2}\boldsymbol{h}_{1,1} + \lambda_k^{n-3}\boldsymbol{h}_{2,1} + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{h}_{n-2,1} + \boldsymbol{h}_{n-1,1}$$

$$\boldsymbol{u}_{k,1} = \left(\left(\left(\boldsymbol{e}_1\lambda_k + \boldsymbol{h}_{1,1}\right)\lambda_k + \boldsymbol{h}_{2,1}\right)\lambda_k + \ldots + \boldsymbol{h}_{n-2,1}\right)\lambda_k + \boldsymbol{h}_{n-1,1}$$

AUFGABE 2 10 PUNKTE

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ mit ihrem charakteristischen Polynom ist gegeben.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad f(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 30\lambda + 4$$

a) Geben Sie die Punktmengen der GERSCHGORIN-Kreise an. 2 P.

b) Formulieren Sie f und f' in der HORNER-Schreibweise. 1 P.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i auf 3 Nachkommastellen genau mit Hilfe der NEWTON-Iteration. 4,5 P.

d) Skizzieren Sie die drei GERSCHGORIN-Kreislinien in der Re-Im-Zahlenebene. 2,5 P.

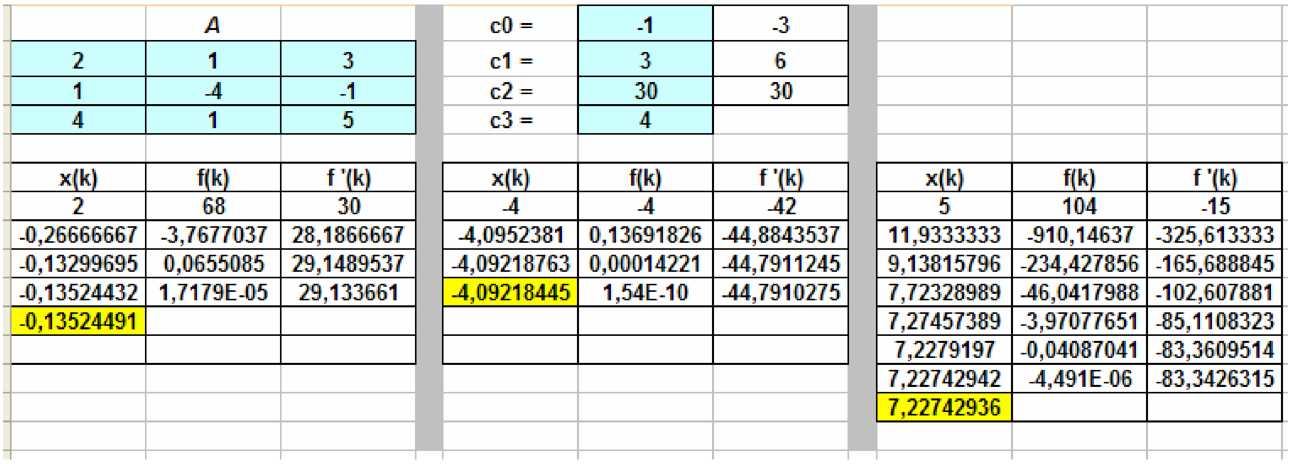
$$\mathbb{K}_i = \left\{ z \,\middle|\, |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \dots, n \right\} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

a) $K_1 = \{z \mid |z-2| \le 4\},\ K_2 = \{z \mid |z+4| \le 2\},\ K_3 = \{z \mid |z-5| \le 5\}$

b) $f(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 30\lambda + 4 = ((-\lambda + 3)\lambda + 30)\lambda + 4$

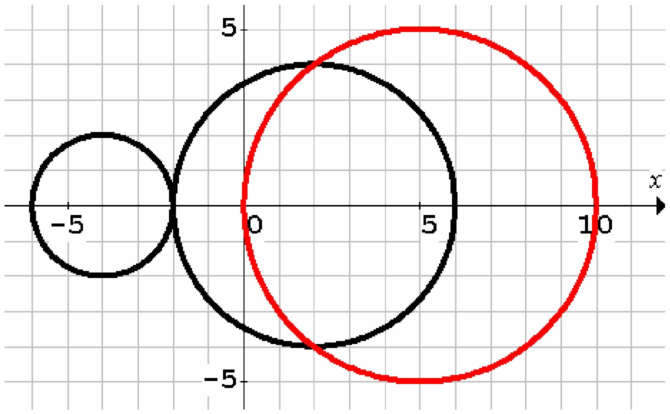
$f'(\lambda) = -3\lambda^2 + 6\lambda + 30 = (-3\lambda + 6)\lambda + 30$

c) $\lambda_1 = 7,227.$ $\lambda_2 = 4,092.$ $\lambda_3 = -0,135$



	A		c0 =	-1	-3			
2	1	3	c1 =	3	6			
1	-4	-1	c2 =	30	30			
4	1	5	c3 =	4				
x(k)	f(k)	f '(k)	x(k)	f(k)	f '(k)	x(k)	f(k)	f '(k)
2	68	30	-4	-4	-42	5	104	-15
-0,26666667	-3,7677037	28,1866667	-4,0952381	0,13691826	-44,8843537	11,9333333	-910,14637	-325,613333
-0,13299695	0,0655085	29,1489537	-4,09218763	0,00014221	-44,7911245	9,13815796	-234,427856	-165,688845
-0,13524432	1,7179E-05	29,133661	-4,09218445	1,54E-10	-44,7910275	7,72328989	-46,0417988	-102,607881
-0,13524491						7,27457389	-3,97077651	-85,1108323
						7,2279197	-0,04087041	-83,3609514
						7,22742942	-4,491E-06	-83,3426315
						7,22742936		

d)



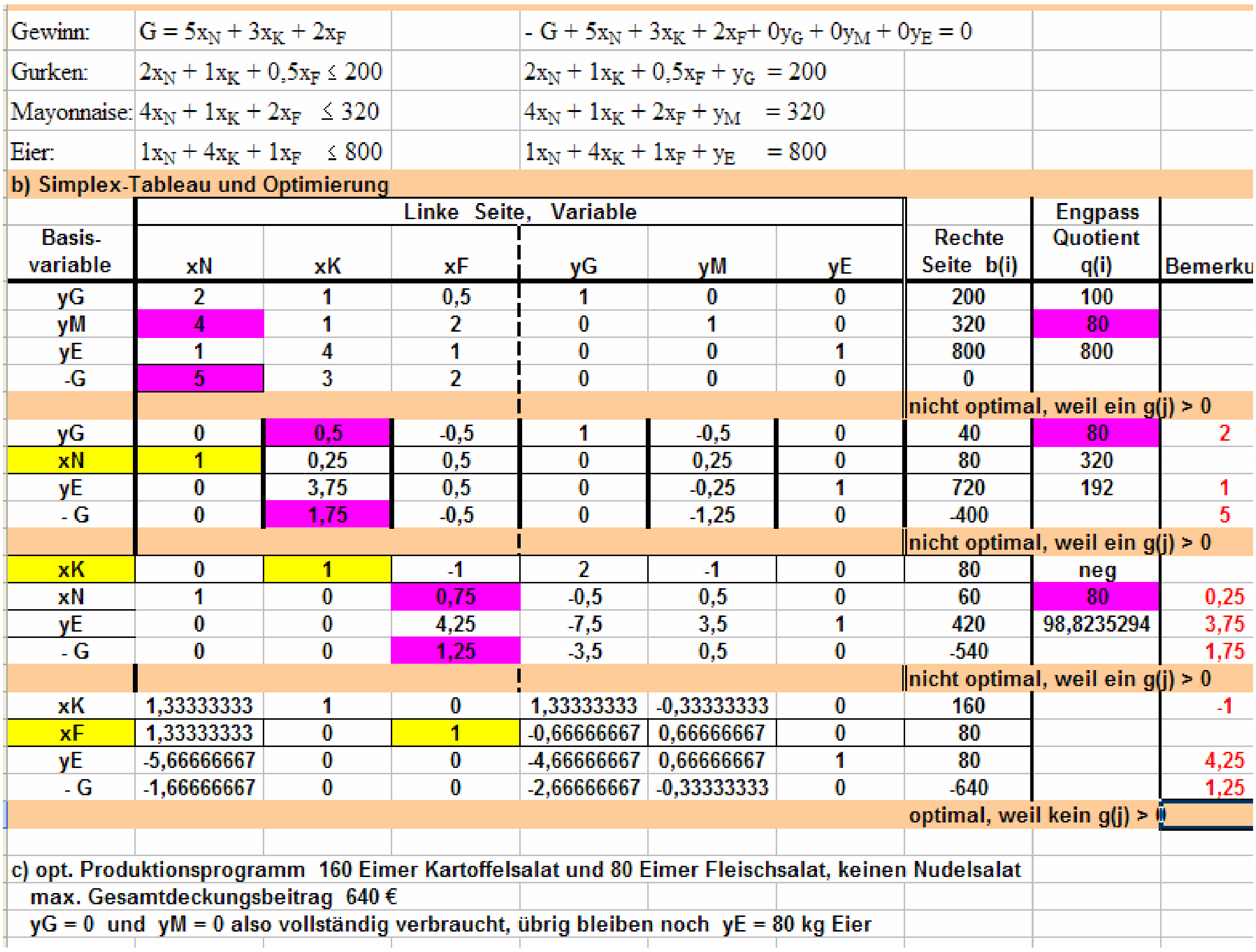
AUFGABE 3 10 PUNKTE

Ein Salatproduzent stellt Nudelsalat, Kartoffelsalat und Fleischsalat her.
Für einen Eimer Nudelsalat benötigt er 2 kg Gurken, 4 kg Mayonnaise und 1 kg Eier,
für einen Eimer Kartoffelsalat dagegen 1 kg Gurken, 1 kg Mayonnaise und 4 kg Eier und
für einen Eimer Fleischsalat ½ kg Gurken, 2 kg Mayonnaise und 1 kg Eier.

Die übrigen Zutaten mögen reichlich vorhanden sein, aber Gurken, Mayonnaise und Eier sind knapp: er hat nur noch 200 kg Gurken, 320 kg Mayonnaise und 800 kg Eier auf Lager.

Die Deckungsbeiträge je Eimer betragen 5 € für Nudelsalat, 3 € für Kartoffelsalat und 2 € für Fleischsalat.

a) Formulieren Sie das mathematische Modell (Bedingungen und Zielfunktion). 2 P.
b) Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm mit Hilfe des Simplexverfahrens.
Geben Sie jeweils die aktuellen Basisvariablen an.
Geben Sie bei jeder Basislösung an, ob sie optimal ist oder nicht und begründen Sie jeweils kurz Ihre Ansicht. 6 P.
c) Bestimmen Sie den max. Gesamtdeckungsbeitrag und machen Sie Angaben über die Ausnutzung der Kapazitäten. 2 P.



Gewinn: $G = 5x_N + 3x_K + 2x_F$ $\quad$ $- G + 5x_N + 3x_K + 2x_F + 0y_G + 0y_M + 0y_E = 0$

Gurken: $2x_N + 1x_K + 0{,}5x_F \leq 200$ $\quad$ $2x_N + 1x_K + 0{,}5x_F + y_G = 200$

Mayonnaise: $4x_N + 1x_K + 2x_F \leq 320$ $\quad$ $4x_N + 1x_K + 2x_F + y_M = 320$

Eier: $1x_N + 4x_K + 1x_F \leq 800$ $\quad$ $1x_N + 4x_K + 1x_F + y_E = 800$

b) Simplex-Tableau und Optimierung

	Linke Seite, Variable								
Basis-variable	xN	xK	xF	yG	yM	yE	Rechte Seite b(i)	Engpass Quotient q(i)	Bemerku
yG	2	1	0,5	1	0	0	200	100	
yM	4	1	2	0	1	0	320	80	
yE	1	4	1	0	0	1	800	800	
-G	5	3	2	0	0	0	0		
							nicht optimal, weil ein g(j) > 0		
yG	0	0,5	-0,5	1	-0,5	0	40	80	2
xN	1	0,25	0,5	0	0,25	0	80	320	
yE	0	3,75	0,5	0	-0,25	1	720	192	1
- G	0	1,75	-0,5	0	-1,25	0	-400		5
							nicht optimal, weil ein g(j) > 0		
xK	0	1	-1	2	-1	0	80	neg	
xN	1	0	0,75	-0,5	0,5	0	60	80	0,25
yE	0	0	4,25	-7,5	3,5	1	420	98,8235294	3,75
- G	0	0	1,25	-3,5	0,5	0	-540		1,75
							nicht optimal, weil ein g(j) > 0		
xK	1,33333333	1	0	1,33333333	-0,33333333	0	160		-1
xF	1,33333333	0	1	-0,66666667	0,66666667	0	80		
yE	-5,66666667	0	0	-4,66666667	0,66666667	1	80		4,25
- G	-1,66666667	0	0	-2,66666667	-0,33333333	0	-640		1,25
							optimal, weil kein g(j) > 0		

c) opt. Produktionsprogramm 160 Eimer Kartoffelsalat und 80 Eimer Fleischsalat, keinen Nudelsalat
max. Gesamtdeckungsbeitrag 640 €
yG = 0 und yM = 0 also vollständig verbraucht, übrig bleiben noch yE = 80 kg Eier

AUFGABE 4 10 PUNKTE

Auf einer Produktionsanlage können drei verschiedene Produkte gefertigt werden.
Es ist zu berechnen wie viel Stück x_i jeweils vom Produkt *i* produziert werden sollen, um den höchsten Gesamt-Deckungsbeitrag $G = -20\,x_1 + 40\,x_2 + 30\,x_3$ zu erreichen.
Dabei sind folgende Höchstens-, Mindestens- und Gleichungs-Restriktionen zu beachten:

$2\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 \le 40.$ $2\,x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 \ge 16.$ $x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 = 10.$

$x_1 \ge 0;$ $x_2 \ge 0;$ $x_3 \ge 0;$

Bestimmen Sie das optimale Fertigungsprogramm für die *i* Produkte.

a) Erstellen Sie ein passendes Simplex-Tableau aus diesen Angaben.
Geben Sie die dazu notwendigen Umrechnungen genau an. [2 P.]

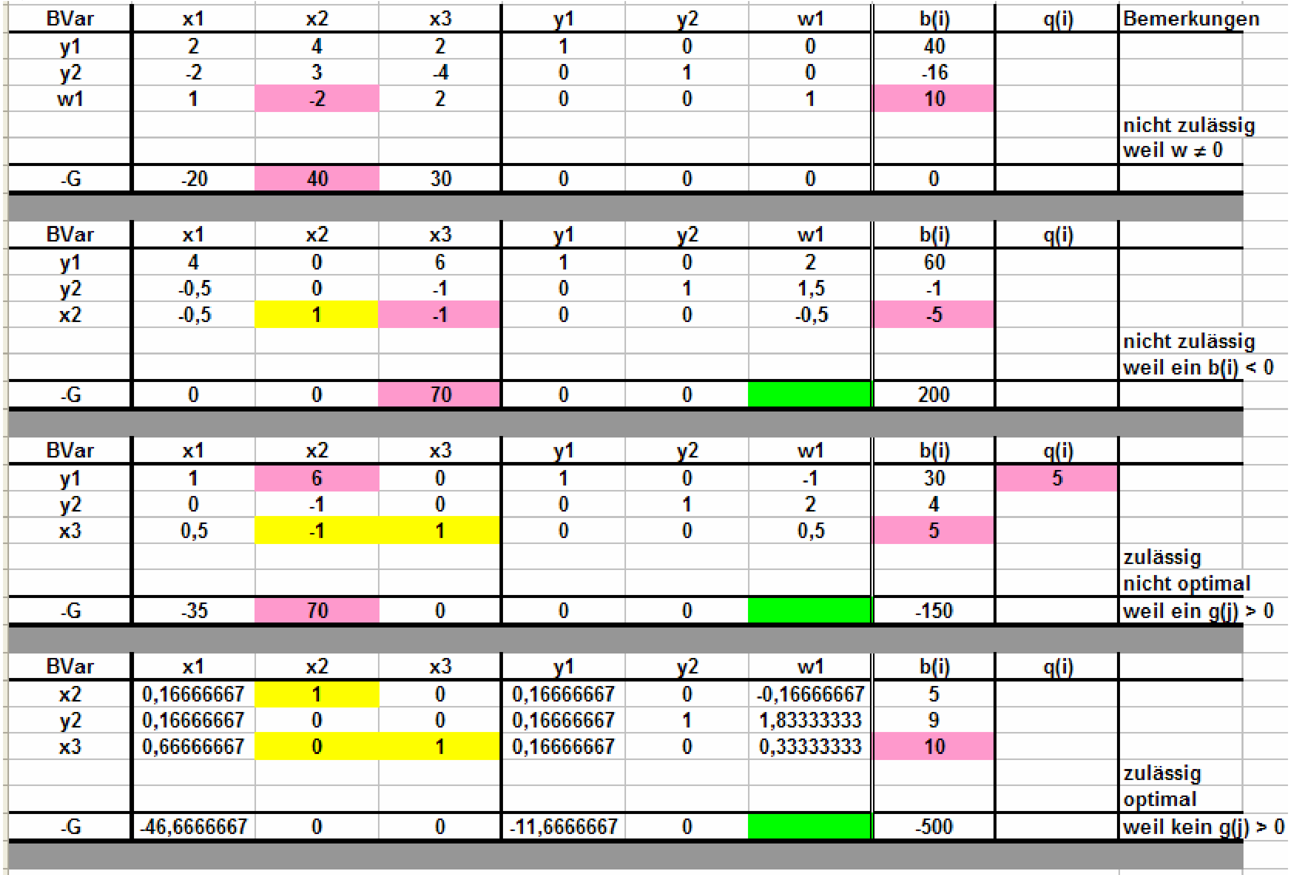
b) Führen Sie das Optimierungsverfahren durch.
Geben Sie bei jeder Basislösung an, ob sie zulässig ist oder nicht bzw. ob sie optimal ist oder nicht. Begründen Sie jeweils kurz Ihre Ansicht. [7 P.]

c) Geben Sie die Lösung des Optimierungsproblems und G_{maximal} an. [1 P.]

a)

$$\boxed{\begin{aligned} &2x_1+4x_2+2x_3\le 40\\ &2x_1-3x_2+4x_3\ge 16\\ &x_1-2x_2+2x_3=10\\ &G=-20x_1+40x_2+30x_3 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &2x_1+4x_2+2x_3\le 40\\ &-2x_1+3x_2-4x_3\le -16\\ &x_1-2x_2+2x_3=10\\ &-G-20x_1+40x_2+30x_3=0 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} 2x_1+4x_2+2x_3+y_1&=40\\ -2x_1+3x_2-4x_3+y_2&=-16\\ x_1-2x_2+2x_3+w&=10\\ -G-20x_1+40x_2+30x_3&=0 \end{aligned}}$$

b)



BVar	x1	x2	x3	y1	y2	w1	b(i)	q(i)	Bemerkungen
y1	2	4	2	1	0	0	40		
y2	-2	3	-4	0	1	0	-16		
w1	1	-2	2	0	0	1	10		
									nicht zulässig
									weil w ≠ 0
-G	-20	40	30	0	0	0	0		

BVar	x1	x2	x3	y1	y2	w1	b(i)	q(i)	
y1	4	0	6	1	0	2	60		
y2	-0,5	0	-1	0	1	1,5	-1		
x2	-0,5	1	-1	0	0	-0,5	-5		
									nicht zulässig
									weil ein b(i) < 0
-G	0	0	70	0	0	🟩	200		

BVar	x1	x2	x3	y1	y2	w1	b(i)	q(i)	
y1	1	6	0	1	0	-1	30	5	
y2	0	-1	0	0	1	2	4		
x3	0,5	-1	1	0	0	0,5	5		
									zulässig
									nicht optimal
-G	-35	70	0	0	0	🟩	-150		weil ein g(j) > 0

BVar	x1	x2	x3	y1	y2	w1	b(i)	q(i)	
x2	0,16666667	1	0	0,16666667	0	-0,16666667	5		
y2	0,16666667	0	0	0,16666667	1	1,83333333	9		
x3	0,66666667	0	1	0,16666667	0	0,33333333	10		
									zulässig
									optimal
-G	-46,6666667	0	0	-11,6666667	0	🟩	-500		weil kein g(j) > 0

c) $x_1 = 0$ Stück, $x_2 = 5$ Stück, $x_3 = 10$ Stück. Deckungsbeitrag G = 500 [Geldeinheiten]