Math. II, Numerik, Uebung 3, Termin 08.11.2012

1-Zwei-Phasen, 2-Newton-Interpolation, 3-Bézier, 4-A'-Regression

AUFGABE 1 10 PUNKTE

Bei einem Mischungsproblem liegen folgende Mindest- und Höchstbedingungen vor:

$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 160.$

$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 200.$

$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 180.$

$x_j, y_i \geq 0$

Für die Summe der Kosten K gilt $K = -G = 40x_1 + 10x_2 + 20x_3 \rightarrow$ Minimum.

a) Erstellen Sie ein passendes Simplex-Tableau aus diesen Angaben. 1,5 P.

b) Führen Sie das Optimierungsverfahren durch. Geben Sie bei jeder Basislösung an, ob sie zulässig ist oder nicht bzw. ob sie optimal ist oder nicht. Begründen Sie jeweils kurz Ihre Ansicht. 6,5 P.

c) Geben Sie die Lösung des Optimierungsproblems und die minimalen Gesamtkosten K an. 1 P.

d) Erläutern Sie an diesem Beispiel, was man unter den beiden Phasen der hier verwendeten Zwei-Phasen-Methode versteht. 1 P.

a)

$$\begin{array}{l} 2x_1+2x_2+x_3 \geq 160 \\ x_1+4x_2+2x_3 \geq 200 \\ 3x_1+x_2+x_3 \leq 180 \\ -G = 40x_1+10x_2+20x_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -2x_1-2x_2-x_3 \leq -160 \\ -x_1-4x_2-2x_3 \leq -200 \\ 3x_1+x_2+x_3 \leq 180 \\ G = -40x_1-10x_2-20x_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} -2x_1-2x_2-x_3+y_1 = -160 \\ -x_1-4x_2-2x_3+y_2 = -200 \\ 3x_1+x_2+x_3 \quad +y_3 = 180 \\ -G-40x_1-10x_2-20x_3 = 0 \end{array}$$

b)

BV	Linke Seite, Variable x1	x2	x3	y1	y2	y3	b(i)	Engpass q(i)	
y1	-2	-2	-1	1	0	0	-160		
y2	-1	-4	-2	0	1	0	-200		
y3	3	1	1	0	0	1	180		
- G	-40	-10	-20	0	0	0	0		
								nicht zulässig, weil ein b(i) < 0	
y1	-1,5	0	0	1	-0,5	0	-60		
x2	0,25	1	0,5	0	-0,25	0	50		
y3	2,75	0	0,5	0	0,25	1	130		
- G	-37,5	0	-15	0	-2,5	0	500		
								nicht zulässig, weil ein b(i) < 0	
y2	3	0	0	-2	1	0	120		
x2	1	1	0,5	-0,5	0	0	80		
y3	2	0	0,5	0,5	0	1	100		
- G	-30	0	-15	-5	0	0	800	zulässig, weil kein b(i) < 0	
								optimal, weil alle g(j) <= 0	

c) Lösung: x2 = 80. minimale Gesamtkosten G = - 800

d) Die Mindestbedingungen führen zu einer unzulässigen Start-Basislösung:
y1 und y2 verletzen die Nicht-Negativitätbedingung.
In einer ersten Phase muss das mathematische Modell in ein Standardmodell für das Simplex-Verfahren transformiert werden.
Wenn die Basislösung zulässig ist, führt man die zweite Phase durch, d.h. die Simplexmethode.
In diesem Beispiel ist die erste zulässige Basislösung zugleich optimal,
d.h. die Phase 2 ist nicht erforderlich

AUFGABE 2 10 PUNKTE

Fünf Ergebnisse einer Messreihe $(x_i \mid y_i)$, i = 0, 1, 2, 3, 4 sind bekannt:

(0 | -3), (-1 | 2), (2 | 2), (4 | 7), (1,5 | 3)

a) Bestimmen Sie das interpolierende Polynom in NEWTON-Form.
Benutzen Sie das das Interpolationsschema mit dividierten Differenzen. [4 P.]

b) Bestimmen Sie die HORNER-Form aus der NEWTON-Form dieses Polynoms. [2 P.]

c) Bestimmen Sie damit den Wert $f(2{,}5)$. [1 P.]

d) Bestimmen Sie die Hauptform dieses Polynoms. [2 P.]

e) Beschreiben Sie die Vorteile, die die Interpolation nach NEWTON gegenüber der Interpolation mit Hilfe der VANDERMONDE-Matrix aufweist. [1 P.]

x - x(i)	x(i)	y(i)				
2,5	0	-3				
			-5			
3,5	-1	2		2,5		
			0		-0,5	
0,5	2	2		0,5		0,68
			2,5		0,52	
-1,5	4	7		1,8		
			1,6			
1	1,5	3				

a) $f(x) = -3 - 5(x-0) + 2{,}5(x-0)(x+1) - 0{,}5(x-0)(x+1)(x-2) + 0{,}68(x-0)(x+1)(x-2)(x-4)$

b) $f(x) = (((0{,}68(x-4) - 0{,}5).(x-2) + 2{,}5).(x+1) + 4).(x-0) - 3.$

c) $f(2{,}5) = -0{,}275$

d) $f(x) = -3 - 5x + 2{,}5\,x\,(x+1) - 0{,}5\,x\,(x^2 - x - 2) + 0{,}68\,(x^2 + x)(x^2 - 6x + 8)$

$= -3 - 5x + 2{,}5x^2 + 2{,}5x - 0{,}5x^3 + 0{,}5x^2 + x + 0{,}68(x^4 - 6x^3 + 8x^2 + x^3 - 6x^2 + 8x)$

$= \ldots \qquad + 0{,}68(x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x)$

$= \ldots \qquad + 0{,}68x^4 - 3{,}4x^3 + 1{,}36x^2 + 5{,}44x$

$= 0{,}68\,x^4 - 3{,}9\,x^3 + 4{,}36\,x^2 + 3{,}94\,x - 3$

e) Die Interpolation nach Newton hat drei Vorteile:

1. Es vermeidet die Rundungsfehler, die beim Lösen des Gleichungssystems $\boldsymbol{Va = y}$ entstehen.
2. Wenn man einen neuen Stützpunkt hinzufügt, muss nicht das ganze Gleichungssystem neu berechnet werden
3. Die Berechnungen sind viel einfacher als die Auswertung mit $\boldsymbol{Va = y}$.

AUFGABE 3 10 PUNKTE

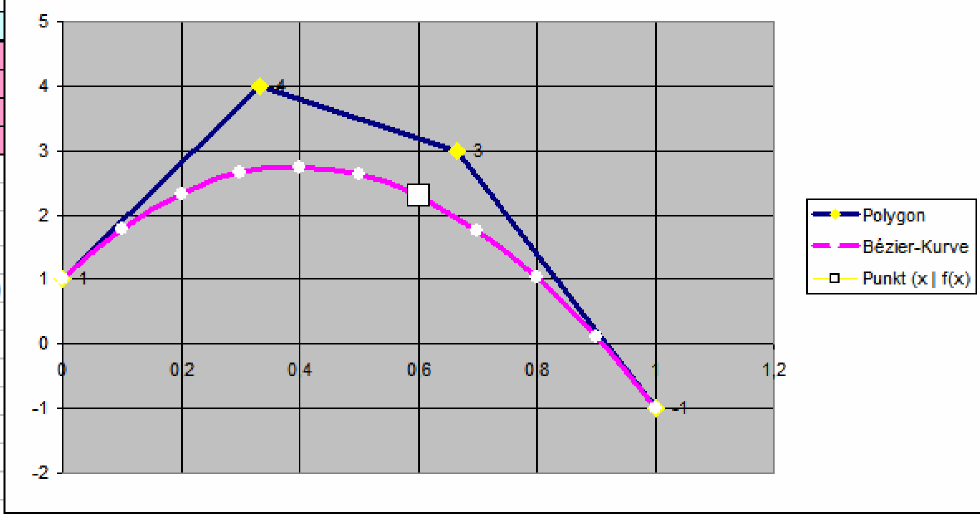
Bei einem CAD-Problem ist eine BÉZIER-Kurve als optimale Kontur zu entwickeln.
Die Hülle der BÉZIER-Kurve ist das Polygon, dessen Eckpunkte die folgenden Werte haben:

$y_0 = 1,\ y_1 = 4,\ y_2 = 3,\ y_3 = -1.$

a) Zeichnen Sie das BÉZIER-Polygon. 1 P.
b) Formulieren Sie die BÉZIER-Polynomfunktion, auch in HORNER-Form. 2 P.
c) Bestimmen Sie den Punkt $(0{,}6 \mid y)$ auf der BÉZIER-Kurve mit dem Schema nach DE CASTELJAU. 3 P.
d) Bestimmen Sie Steigung und Steigungswinkel (in Grad) für diesen Punkt. 1 P.
e) Skizzieren Sie die BÉZIER-Kurve auf Grund dieser Eigenschaften. 1 P.
f) Welche Steigungen haben hier die Randpunkte der BÉZIER-Kurve? 1 P.
g) Worin besteht der Unterschied zwischen BERNSTEIN- und BÉZIER-Polynomen? 1 P.

Wertetabelle Polygon	
x	y
0	1
0,333	4
0,667	3
1	-1

a) e)



1-x =	0,4
x =	0,6

	$y_0 .. y_3$	$y_{01} .. y_{23}$	$y_{012} .. y_{123}$	$f(x) = y_{0123}$
	1			
0,4	4	2,8		
0,6	3	3,4	3,16	
	-1	0,6	1,72	2,296

d) Steigung $f'(x) =$ -4,32
Steigungswinkel $a(x) =$ -76,97°

b)
$$f(x) = 1\cdot(1-x)^3 + 4\cdot 3(1-x)^2 x + 3\cdot 3(1-x)x^2 + (-1)x^3$$
$$f(x) = (1-x)^3 + 12x\cdot(1-x)^2 + 9x^2\cdot(1-x) - x^3$$
$$f(x) = \left(\left((1-x) + 12x\right)\cdot(1-x) + 9x^2\right)\cdot(1-x) - x^3$$

c) Punkt (0,6 | 2,296)

f) bei P_0 (4 - 1)*3 = 9 bei P_3 (-1 - 3)*3 = -12

g) Man vergleiche etwa die Definitionen in der Formelsammlung:
Die Bézier-Polynome entstehen aus den Bernstein-Polynomen, wenn die Summanden mit den Gewichten y(i) versieht.

AUFGABE 4 10 PUNKTE

Aus einer Untersuchung über den Einfluss der Variablen X auf die Größe Y ergaben sich die Werte wie sie die nebenstehende Wertetabelle zeigt. Man vermutet einen Zusammenhang entsprechend der Ansatzfunktion $\hat{y} = a\,x^{\frac{2}{3}} + b = a\sqrt[3]{x^2} + b$

x_i	y_i
0	−2
2	1
3	2
6	4
5	3

a) Machen Sie einen Ansatz für die Abweichungsquadrate *A*, speziell für die gegebene Ansatzfunktion. 1 P.

b) Bilden Sie die Ableitungen $\frac{\partial A}{\partial a}$ und $\frac{\partial A}{\partial b}$. 2 P.

c) Formulieren sie die Normalgleichungen für die gegebenen Werte. Erstellen Sie dazu eine entsprechende Arbeitstabelle. 3 P.

d) Formulieren Sie Formeln für die Regressionskoeffizienten *a*, *b*, speziell für die gegebene Ansatzfunktion. 1,5 P.

e) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Regressionsfunktion mit dem linearen Gleichungssystem aus c) oder den Formeln aus d) 1,5 P.

f) Bestimmen Sie den Interpolationswert für $x = 4{,}1$. 1 P.

x(i)	y(i)	$\sqrt[3]{x_i^2}$	$\sqrt[3]{x_i^2}\cdot y_i$	$\left(\sqrt[3]{x_i^2}\right)^2$	
0	-2	0	0	0	
2	1	1,5874	1,5874	2,5198	
3	2	2,0801	4,1602	4,3267	
6	4	3,3019	13,2077	10,9027	
5	3	2,9240	8,7721	8,5499	
16	8	9,8934	27,7273	26,2992	Summen

$\sqrt[3]{x_i^2} \neq \sqrt[2]{x_i^3}$

$x^{\frac{2}{3}} \neq x^{\frac{3}{2}}$

a) $A = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a\sqrt[3]{x_i^2} - b)^2$

b) $$\begin{cases} A'(a) = \dfrac{\partial A}{\partial a} = \sum 2\cdot\left(y_i - a\sqrt[3]{x_i^2} - b\right)\cdot\left(-\sqrt[3]{x_i^2}\right) \\ A'(b) = \dfrac{\partial A}{\partial b} = \sum 2\cdot\left(y_i - a\sqrt[3]{x_i^2} - b\right)\cdot(-1) \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} a\sum\left(\sqrt[3]{x_i^2}\right)^2 + b\sum\sqrt[3]{x_i^2} = \sum y_i\sqrt[3]{x_i^2} \\ a\sum\sqrt[3]{x_i^2} + nb = \sum y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 26{,}299\,a + 9{,}893\,b = 27{,}727 \\ 9{,}893\,a + 5\,b = 8 \end{cases}$$

d) $$a = \frac{n\sum y_i\cdot\varphi(x_i) - \sum y_i\cdot\sum\varphi(x_i)}{n\sum(\varphi(x_i))^2 - \left(\sum\varphi(x_i)\right)^2} = \frac{5\sum y_i\cdot\sqrt[3]{x_i^2} - \sum y_i\cdot\sum\sqrt[3]{x_i^2}}{5\sum\left(\sqrt[3]{x_i^2}\right)^2 - \left(\sum\sqrt[3]{x_i^2}\right)^2}$$ speziell hier

$$b = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{a}{n}\sum\varphi(x_i) = \frac{1}{5}\sum y_i - \frac{a}{5}\sum\sqrt[3]{x_i^2}$$

e) $\hat{y} = 1{,}77\,x^{\frac{2}{3}} - 1{,}9 = 1{,}77\,\sqrt[3]{x_i^2} - 1{,}9$ f) $\hat{y}(4{,}1) = 2{,}632$