V^T–REGRESSION 1

Aus einer Untersuchung über den Einfluss der beiden Variablen U und X auf die Größe Y ergaben sich die Werte wie sie die nebenstehende Wertetabelle zeigt.

u_i	x_i	y_i
1	1	1,2
1	2	1,4
1	3	2
2	1	2,5
2	2	3,2
2	3	3,4
3	1	3,7
3	2	3,9
3	3	4,3

Gesucht ist ein Regressionsfunktion nach dem multiplen Modell
$\hat{y}(u, x) = a_0 + a_1 u + a_2 x + a_3 u^2 + a_4 x^2 + a_5 u x$

a) Formulieren Sie die VANDERMONDE-Matrix für dieses Regressionsmodell
b) Die Lösung ist
$\boldsymbol{a} = (–1{,}4444;\ 2{,}45;\ 0{,}4167;\ –0{,}2833;\ 0{,}0167; –0{,}05)^T$
Bestimmen Sie für das Szenario $u = 2$, $x = 4$
die beste Schätzung.
c) Erläutern Sie, was man unter einer multiplen Regression versteht.

$$\hat{y}(u, x) = a_0 + a_1 u + a_2 x + a_3 u^2 + a_4 x^2 + a_5 u x$$

VANDERMONDE-Matrix

		u	x	u^2	x^2	u*x
a)	1	1	1	1	1	1
	1	1	2	1	4	2
	1	1	3	1	9	3
	1	2	1	4	1	2
	1	2	2	4	4	4
	1	2	3	4	9	6
	1	3	1	9	1	3
	1	3	2	9	4	6
	1	3	3	9	9	9

b) $\boldsymbol{a} = (–1{,}4444;\ 2{,}45;\ 0{,}4167;\ –0{,}2833;\ 0{,}0167; –0{,}05)^T$

y(2 ; 4) = 3,8568

c) Bei einer multiplen Regression gibt es mehr als eine Einflussvariable

V^T-REGRESSION 2

Zwischen der Größe Y und der Einflussvariablen X wird folgender Zusammenhang vermutet: $\hat{y} = a_0 + a_1 x^2 + a_2 \cdot \frac{1}{x}$

Aus einer entsprechenden Untersuchung ging die nebenstehende nebenstehende Wertetabelle hervor.

x_i	y_i
2	10
4	6
6	3
5	4

Gesucht ist ein Regressionsfunktion nach dem genannten Modell.

a) Formulieren Sie die VANDERMONDE-Matrix für dieses Regressionsmodell
b) Erstellen Sie ein Schema zur Berechnung der a_i. Bestimmen Sie die Gleichung der Regressionsfunktion
c) Berechnen Sie den besten Schätzwert $\hat{y}(3)$.
d) Geben Sie eine Funktionsgleichung für ein nichtlineares Regressionsmodell an.

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x^2 + a_2 \cdot \frac{1}{x}$$

				1	4	0,5	10	
				1	16	0,25	6	
				1	36	0,1667	3	
				1	25	0,2	4	
1	1	1	1	4	81	1,1167	23	
4	16	36	25	81	2193	17	344	
0,5	0,25	0,1667	0,2	1,1167	17	0,3803	7,8	
				1	20,25	0,2792	5,75	
				0	552,75	-5,6125	-121,75	81
				0	-5,6125	0,0685	1,3792	1,1167
				1	0	0,4848	10,2103	20,25
				0	1	-0,0102	-0,2203	
				0	0	0,0116	0,1429	-5,6125
				1	0	0	4,2125	0,4848
				0	1	0	-0,0946	-0,0102
				0	0	1	12,3723	

b) $\hat{y} = 4,21 - 0,095x^2 + 12,37 \cdot \frac{1}{x}$

c) y(3) = 7,485

d) $\hat{y} = a \cdot e^{bx}, \;\; \hat{y} = a \cdot \sin(bx), \;\; \hat{y} = a \cdot x^b$

V^T-Regression 3

u_i	x_i	y_i
−1	2	12
−2	2	10
1	3	15
2	4	8
4	2	16

Aus einer Untersuchung über den Einfluss der beiden Variablen U und X auf die Größe Y ergaben sich die Werte wie sie die nebenstehende Wertetabelle zeigt.

Gesucht ist ein Regressionsfunktion nach dem multiplen Modell
$\hat{y}(u, x) = a_0 + a_1 u^2 + a_2 x^2$

a) Formulieren Sie die VANDERMONDE-Matrix für dieses Regressionsmodell
b) Erstellen Sie ein Schema zur Berechnung der a_i. Bestimmen Sie die Gleichung der Regressionsfunktion
c) Bestimmen Sie für das Szenario u = 3, x = 1 die beste Schätzung $\hat{y}(3; 1)$
d) Wieso muss zur Berechnung der Regressionskoeffizienten der Vektor $\boldsymbol{y}$ mit der Transponierten $\boldsymbol{V^T}$ multipliziert werden?

	$\hat{y}(u, x) = a_0 + a_1 u^2 + a_2 x^2$								
					1	1	4	12	
					1	4	4	10	
					1	1	9	15	
					1	4	16	8	
					1	16	4	16	
1	1	1	1	1	5	26	37	61	
1	4	1	4	16	26	290	157	355	
4	4	9	16	4	37	157	385	415	
					1	5,2	7,4	12,2	
					0	154,8	-35,4	37,8	26
					0	-35,4	111,2	-36,4	37
b)	$\hat{y}(u, x) = 13{,}24 + 0{,}18\, u^2 - 0{,}27\, x^2$								
					1	0	8,5891	10,9302	5,2
c)	$\hat{y}(3,\ 1) =$	14,617			0	1	-0,2287	0,2442	
					0	0	103,1047	-27,7558	-35,4
d) weil die VANDERMONDE-Gleichung V * a = y									
auf beiden Seiten mit der Transponierten V^T					1	0	0	13,2424	8,5891
multipliziert wird					0	1	0	0,1826	-0,2287
					0	0	1	-0,2692	

REIHEN-INTEGRATION 1

Reihen-Int 1

a) Das bestimmte Integral $\int_{0,2}^{0,85} e^x \sin x \, dx$ ist zu bestimmen. Genauigkeit: $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-3}$

Benutzen Sie dazu $e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots\right)$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} - \frac{x^9}{22680} - \ldots \qquad \text{bis } k = 9$$

b) Für die Reihenentwicklung von $\sqrt[3]{a+x} = (a+x)^{\frac{1}{3}}$

benötigt man auch den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \binom{1/3}{3}$. Ermitteln Sie diesen.

$$e^x \sin x \approx x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} - \frac{x^9}{22680}$$

$$\int_{0,2}^{0,85} e^x \sin x \, dx \approx \int_{0,2}^{0,85} \left(x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} - \frac{x^9}{22680}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{180} - \frac{x^7}{630} - \frac{x^8}{5040} - \frac{x^{10}}{226800}\right]_{0,2}^{0,85}$$

b)

$$\binom{\frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3!} = \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{6} = \frac{10}{162}$$

x1 =	0,2		x2 =	0,85
	F(x2)	F(x1)		
Nummer	F(0,85)	F(0,2)		
1	0,36125	0,02		
2	0,204708333	0,002666667		
3	0,043500521	0,000133333		
4	-0,002095275	-3,55556E-07		
5	-0,000508853	-2,03175E-08		
6	-5,40656E-05	-5,07937E-10		
7	-8,68053E-07	-4,51499E-13		
				Ergebnis:
Summen	0,606799793	0,022799624		0,5840

REIHEN-INTEGRATION 2

Die Funktion zu $f(x) = \sin\sqrt{x}$ ist gegeben.

a) Formulieren Sie die entsprechende Potenzreihe für *f*.

b) Bestimmen Sie $\int_0^2 \sin\sqrt{x}\,dx$ auf 3 Nachkommastellen genau.

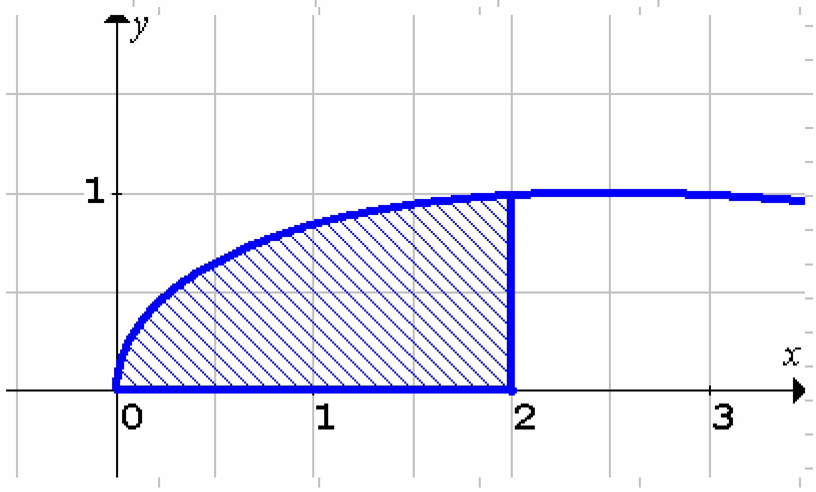
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \ldots \qquad z = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7!} + - \ldots$$

$$\int_0^2 \left(\sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7!} + - \ldots \right) dx = \left[\frac{x^{1,5}}{1,5} - \frac{x^{2,5}}{2,5 \cdot 3!} + \frac{x^{3,5}}{3,5 \cdot 5!} - \frac{x^{4,5}}{4,5 \cdot 7!} \right]_0^2$$

x1 =	0		x2 =	2

Nummer	Summanden
1	1,885618083
3	-0,377123617
5	0,026937401
7	-0,000997682
9	-2,26746E-05
11	
F =	1,534411512



REIHEN-INTEGRATION 3

Die Funktion zu $f(x) = \sqrt{1-x^3}$ ist gegeben.

a) Formulieren Sie die entsprechende Potenzreihe für *f*.

b) Bestimmen Sie $\int\limits_0^{0,8} \sqrt{1-x^3}\,dx$ auf 3 Nachkommastellen genau.

$$\sqrt{(1-z)} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}z^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4 - \ldots \qquad \text{für } |z|<1$$

$$z = x^3 \Rightarrow \sqrt{(1-x^3)} = 1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{16}x^9 - \frac{5}{128}x^{12} - \frac{7}{256}x^{15}\ldots$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx = \left[x - \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} - \frac{x^{10}}{160} - \frac{x^{13}}{1664} - \frac{x^{16}}{3840} - \ldots\right]_0^1$$

Formelsammlung (5.2)

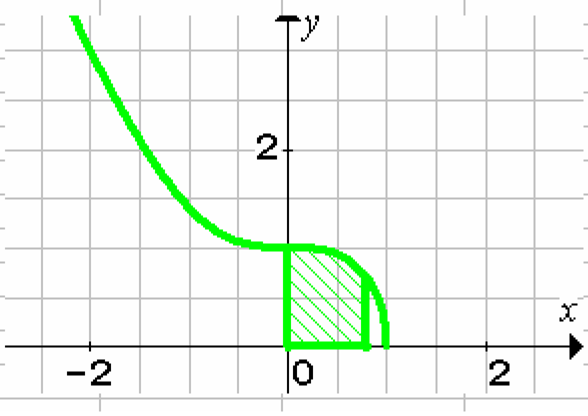
$$\sqrt{(1-z)} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}z^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4 - \ldots \qquad \text{für } |z|<1$$

$$z = x^3 \Rightarrow \sqrt{(1-x^3)} = 1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{16}x^9 - \frac{5}{128}x^{12} - \frac{7}{256}x^{15}\ldots$$

$$\int\limits_0^{0,8} \sqrt{1-x^3}\,dx = \left[x - \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} - \frac{x^{10}}{160} - \frac{x^{13}}{1664} - \frac{x^{16}}{3840} - \ldots\right]_0^1$$

x2 =	0,8

Nummer	Summanden
1	0,8
4	-0,0512
7	-0,003744914
10	-0,000671089
13	-3,30382E-05
16	-7,33008E-06
F =	0,744



SIMPSON-Methode 1

SIMPSON 1

a) Bestimmen Sie den Näherungswert des Integrals $\int_0^{1,96} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ mit Hilfe der SIMPSON-Regel.

Arbeiten Sie mit 11 Stützpunkten. Sie erhalten das Ergebnis mit der Genauigkeit $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$.

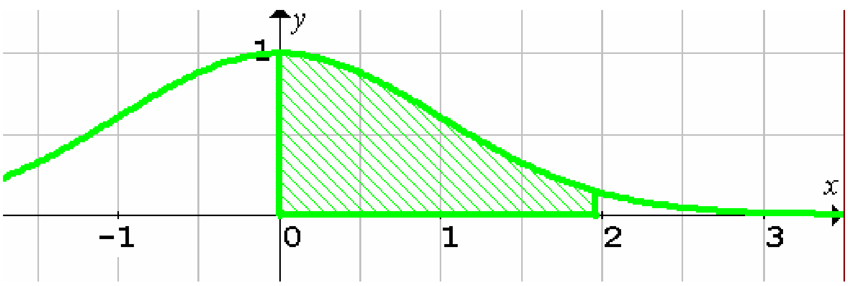
b) Begründen Sie, wieso bei der SIMPSON-Regel eine Näherung mit quadratischen Funktionen stattfindet.

$$\int_0^{1,96} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \quad \text{mit } n = 10 \quad \Rightarrow \frac{1,96-0}{10} = 0,196$$

Untere Integrationsgrenze =	0	
Obere Integrationsgrenze =	1,96000	
Unterteilungen n =	10	
Stützabstand h =	0,1960	

k	x(k)	y(k)			*1, *4, *2
0	0	1,0000	S(0;n) =	1,1465	1,1465
1	0,1960	0,9810	S(ungerade)	3,0421	12,1682
2	0,3920	0,9260	S(gerade)=	2,4548	4,9096
3	0,5880	0,8412			
4	0,7840	0,7354		Summe	18,2243
5	0,9800	0,6187		* h/3 =	1,1907
6	1,1760	0,5008			auf 4 Nach-
7	1,3720	0,3902			kommastellen
8	1,5680	0,2925			exakt
9	1,7640	0,2110			
10	1,9600	0,1465			

b) Die Funktion f wird durch Stücke einer quadratischen Funktion (Parabelstücke) approximiert.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left(S_{0,n} + 4 \cdot S_{ungerade} + 2 \cdot S_{gerade}\right)$$

für stetige Intervalle $x \in [a\,,b]$ und $h = \dfrac{b-a}{n}$

SIMPSON-Methode 2

$y = f(x)$ ist durch nebenstehende Wertetabelle gegeben.

a) Bestimmen Sie den Inhalt $\int_1^9 f(x)\,dx$ mit der SIMPSON-Regel.

b) Worin besteht der Unterschied zwischen der KEPLER'schen Fassregel und der SIMPSON-Regel?

x	y
1	0,00
2	0,69
3	1,10
4	1,39
5	1,61
6	1,79
7	1,95
8	2,08
9	2,20

k	x(k)	y(k)			*1, *4, *2
0	1	0	S(0;n) =	2,2000	2,2000
1	2	0,69	S(ungerade)	5,9500	23,8000
2	3	1,1	S(gerade)=	4,6600	9,3200
3	4	1,39			
4	5	1,61		Summe	35,3200
5	6	1,79		* h/3 =	11,773
6	7	1,95			
7	8	2,08			
8	9	2,2			
	h =	1			

b) Die KEPLER'sche Fassregel gilt nur für die Unterteilung n = 2, d.h. für EIN Parabelstück, die SIMPSON-Regel für n/2 Parabelstücke.