Math. II, Numerik, Uebung 1, Termin 11.10.2012
1-LR-Zerleg, 2-Inverse, 3-LEONTIEF, 4-SEIDEL

ALLGEMEINES

Detaillierter Bewertungsbogen auf der Rückseite des Deckblatts

1. Bei Online-Lieferung: als pdf-Datei. Keine Sichthüllen, keine Hefte abliefern

2. Ich empfehle dringend die Vordrucke zu benutzen, FALK-Schema benutzen
   Evtl. Rückseiten benutzen, wenn der Platz nicht ausreicht.

3. Nur schreiben, was gefragt ist.
   Keine zusätzliche Herleitungen und Beschreibungen der Verfahren.
   Keine Nebenrechnungen, die im Kopf oder Taschenrechner durchgeführt werden.
   Eine Nebenrechnung, wenn man zeigen möchte, wie man gerechnet hat.

4. Zwischenergebnisse und Ansätze angeben, nicht nur Endergebnisse.
   z.B. Ansätze bei Aufgabe 2, nachdem man die inverse Matrix berechnet hat,
   nicht einfach die Lösungsvektoren hinschreiben, sondern
   a) die Vektoren $\boldsymbol{b}$ in Art des FALK-Schemas neben die $\boldsymbol{H}_2$ oder $\boldsymbol{A}^{-1}$ setzen oder
   b) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$ formal (als Formel) oder in Zahlen hinschreiben

5. Drei Nachkommastellen bei Zwischenergebnissen,
   Endergebnsise auf zwei Nachkommastellen bzw. sinnvoll auf ganze Zahlen.
   Typisch bei Aufgabe 3 (LEONTIEF): 2 Nachkommastellen bei den Zwischenergebnissen
   führen zu Abweichungen von bis 20 MWh pro Komponente.
   Aber am Ende sinnvoll auf ganze MWh runden!

6. Ergebnisse explizit angeben.
   Der Leser muss erkennen können, welches die Lösungsvektoren und -Matrizen sind.
   Dazu reicht es natürlich die Bezeichnung dazuschreiben, wie z.B. $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{x}$ (bei SEIDEL).
   Wurde maximal 2 mal als Fehler gewertet (max. -1,5 Punkte)

AUFGABE 1 10 PUNKTE

Eine Koeffizientenmatrix ist gegeben, ihre Elemente sind mittelfristig konstante

Verflechtungsfaktoren a_{ij} $\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Lösungsvektoren $\boldsymbol{x}_k$ für die aktuellen Vektoren

$\boldsymbol{b}_{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der LR-Zerlegung. 8 P.

b) Wieso spricht man hier von einem "rekursiven" Berechnen der Elemente y_j und x_j ? 1 P.

c) Worin besteht der Unterschied zwischen Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. 1 P.

a) $\begin{array}{c|c|c|c} & \boldsymbol{R} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{L} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} & \end{array}$ *LR-Zerlegung mit verkettetem Algorithmus durchführen* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$,

$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{x}$

								a) Lösungsvektoren	
						y(1)	y(2)	x(1)	x(2)
		R	1	2	-1	3	2	2,200	-1,550
			0	-10	10	-14	-9	-0,600	2,650
L			0	0	-2	4	-3,5	-2,000	1,750
1	0	0	1	2	-1	3	2		
4,000	1	0	4	-2	6	-2	-1		
3,000	0,5	1	3	1	0	6	-2		
						b(1)	b(2)		

b) Rekursiv, z.B. bei der Berechnung des Vektors $\boldsymbol{y}$*:*

y_2 wird aus y_1 berechnet, y_3 aus y_1 und y_2 usw.

Rekursiv heißt hier, dass man die bereits berechneten Werte für x_i bzw. y_i einsetzt um die "nächsten" Werte zu bestimmen. Statt "Werte" auch Komponenten oder Koordinaten oder Elemente.

c) Bei einer Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$ *bestimmt man zunächst x_n , dann berechnet man von unten nach oben fortschreitend x_{n-1} , x_{n-2} usw. bis sich schließlich die 1.Komponente ergibt.*

Das ist Rückwärtseinsetzen.

Bei einer Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ *rechnet man stattdessen die Komponenten vorwärts von oben nach unten aus. Man errechnet zuerst $y_1 = b_1$, dann setzt man y_1 in die 2.Zeile ein, um y_2 zu erhalten usw. Das ist Vorwärtseinsetzen.*

auch:

rückwärts rekursiv: x_2 wird aus x_3 berechnet, dann x_1 aus x_3 und x_2 usw.

AUFGABE 2 10 PUNKTE

Matrix $\boldsymbol{A}$ und "Bestellvektoren" $\boldsymbol{b}$ sind gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 3 & 10 & -5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die inverse Matrix, die Determinante und die Lösungsvektoren des linearen Gleichungssystems mit dem Verfahren nach FADDEJEW. 8 P.

b) Unter welcher Voraussetzung löst man lineare Gleichungssysteme mit LR-Zerlegung oder mit Hilfe der inversen Matrix statt mit GAUß'schem Eliminationsverfahren? 1 P.

c) Welches Aussehen hat hier die Hilfsmatrix $\boldsymbol{H}_3$? 1 P.

a) Lösungsvektoren aus: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$. *Inverse Matrix über FADDEJEW-Ansatz:*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{c_n} \cdot \boldsymbol{H}_{n-1} \qquad \det \boldsymbol{A} = (-1)^{n+1} c_n$$

mit

	$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{A}_1 - c_1 \cdot \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{A}_2 - c_2 \cdot \boldsymbol{E}$	$\cdots$	$\boldsymbol{H}_n = \boldsymbol{O}_{(n,n)}$
$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{H}_1$	$\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{H}_2$	$\cdots$	
$c_1 = \frac{spur\,\boldsymbol{A}_1}{1}$	$c_2 = \frac{spur\,\boldsymbol{A}_2}{2}$	$c_3 = \frac{spur\,\boldsymbol{A}_3}{3}$	$\cdots$	

i = 1			i = 2			i = 3		
			-2	3	-2	45	-5	-10
			2	4	-8	-14	1	4
			3	10	-8	-1	-1	1
1	3	-2	-2	-5	-10	5	0	0
2	7	-8	-14	-46	4	0	5	0
3	10	-5	-1	-1	-46	0	0	5
c(i) =	3			-47			5	

det $\boldsymbol{A} = c_3 = 5$ $\qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{H}_2 / 5$

					1	4
					-1	-6
					3	2
		45	-5	-10	20	190
A^{-1} =	0,2	-14	1	4	-3	-54
		-1	-1	1	3	4
					4,0	38,0
				x =	-0,6	-10,8
					0,6	0,8

"Lösung" explizit angeben

b) Wenn die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ *relativ konstant ist und sie rechte Seiten* $\boldsymbol{b}$ *des linearen Gleichungssystems häufig wechseln.*

c) $\boldsymbol{H}_3$ *ist eine Nullmatrix. (Ihre Elemente sind sämtlich null.)*

AUFGABE 3 10 PUNKTE

a) Zum Unternehmen Rhein-Neckar-Werke gehören drei Zweigwerke in Landau(L), Mannheim(M) und Neckarsulm (N) die sich gegenseitig und den Markt mit Strom beliefern.
Die Zweigwerke benötigen selbst Energie für technische Prozesse.
Die Zweigwerke sind nach dem LEONTIEF-Modell miteinander verflochten.

Die Matrix (m_{ij}) zeigt die internen Lieferungen vom Zweigwerk i zum Zweigwerk j. Die angegebenen Mengen sind jeweils Megawattstunden [MWh].	$\left(m_{ij}\right) = \begin{array}{c\|ccc} & & j & \\ \hline & 500 & 200 & 100 \\ i & 400 & 400 & 500 \\ & 400 & 200 & 200 \end{array}$

Die Zweigwerke lieferten 2011 an den Markt: L: 200 MWh, M: 700 MWh, N: 200 MWh.
Bestimmen Sie die Verflechtungsmatrix (a_{ij}). (Inputmatrix (a_{ij})) 2 P.
Geben Sie hier und in allen folgenden Aufgabenteilen formal Ihre Lösungsschritte an.

b) Marktuntersuchungen lassen für das Jahr 2012 folgende Lieferungen an den Markt erwarten: L liefert 100 MWh an den Markt, M 400 MWh und N 300 MWh.
Bestimmen Sie die LEONTIEF-Inverse L^{-1} und berechnen Sie damit, wie viel Energie die Zweigwerke unter diesen Bedingungen produzieren müssen, wenn man eine gleichbleibende Inputmatrix (a_{ij}) voraussetzt. Runden Sie sinnvoll. 6 P.

c) Im Jahr 2013 sollen von L 1200, von M 1800 und von N 1000 MWh produziert werden. Wie viel Energie können die Zweigwerke 2013 am Markt anbieten, wenn man wieder eine konstante Inputmatrix (a_{ij}) zugrunde legt? Runden Sie sinnvoll. 2 P.

a) Verflechtungsmatrix (a_{ij}) mit $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ =

0,5	0,1	0,1
0,4	0,2	0,5
0,4	0,1	0,2

b) Verflechtungsgleichung: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ => *notwendige Produktion* $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{y}$
(1) ***E – A** bilden* (2) $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$ *mit FADDEJEW-Ansatz* (3)*Multiplikation mit gegebenem **y**.*

	Berechnung der LEONTIEF-Inverse mit FADDEJEW-Verfahren								
			-1,6	-0,1	-0,1	0,59	0,09	0,13	
		H_i =	-0,4	-1,3	-0,5	0,52	0,36	0,29	
$E - A = A_1$			-0,4	-0,1	-1,3	0,36	0,09	0,36	
0,5	-0,1	-0,1	-0,72	0,09	0,13	0,207	0	0	
-0,4	0,8	-0,5	0,52	-0,95	0,29	0	0,207	0	
-0,4	-0,1	0,8	0,36	0,09	-0,95	0	0	0,207	100
c_1 =	2,1		c_2 =	-1,31		c_3 =	0,207		400
									300
						0,59	0,09	0,13	647
				$(E - A)^{-1}$ =	4,83091787	0,52	0,36	0,29	1367
						0,36	0,09	0,36	870

notwendige Produktion: ***x** = (647 , 1367, 870) MWh (explizit angegeben)*

c) Verflechtungsgleichung: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ => *neuer Marktvektor* $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x}$
Einfache Multiplikation Matrix . Vektor

			1200	
			1800	= aktuell gemeldete Gesamtproduktion x
$E - A$			1000	
0,5	-0,1	-0,1	320	L kann 320 MWh anbieten
-0,4	0,8	-0,5	460	M kann 460 MWh anbieten
-0,4	-0,1	0,8	140	NU kann 140 MWh anbieten

AUFGABE 4 10 PUNKTE

Ein lineares Gleichungssystem ist gegeben: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 8 \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ -3x_1 - 4x_2 + 3{,}2x_3 = 3 \end{cases}$

a) Formen Sie das lineare Gleichungssystem um, so dass ein möglichst diagonal dominantes lineares Gleichungssystem entsteht. 0,5 P.

b) Prüfen Sie an Hand des Zeilensummenkriteriums, ob die Konvergenz gesichert ist. 0,5 P.

c) Bestimmen Sie den Lösungsvektor mit Hilfe des GAUß-SEIDEL-Verfahrens auf zwei Nachkommastellen genau (maximal 7 Iterationsschritte).
Benutzen Sie als Startvektor $\boldsymbol{x} = (1\,;\,1\,;\,1)^T$ 7 P.

d) Formulieren Sie die Dreiecksmatrix $\boldsymbol{C_L}$ für das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -6 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11 \\ -2x_1 + 3x_2 + 13x_3 - 5x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -1 \end{cases}$$

2 P.

a) $\boxed{\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ -3x_1 - 4x_2 + 3{,}2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 8 \end{cases}}$ *Nur Zeilen passend tauschen.*

Das Umformen geschieht nicht mit der Subtraktion des s-fachen einer oder mehrer Zeilen, das ist so einfach nicht automatisierbar, sondern mit anderen Verfahren.

b) 6 > 3. 4 < 6,2. 8 > 5 nein, das Zeilensummenkriterium ist nicht erfüllt.
Das lineare Gleichungssystem ist nicht diagonal dominant.
Die Konvergenz des Verfahrens ist nicht gesichert.

c) Umformen nach $a_{ii}\, x_i = b_i + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$

Schema :

a_{ii}	b_i	C_L \ C_R			$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

daraus: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{C_R}\,\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{C_L}\,\boldsymbol{x}^{(k+1)}) : a_{ii}$

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ -3x_1 - 4x_2 + 3{,}2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 = -5 \qquad + 2x_2 \quad - x_3 \\ -4x_2 = 3 + 3x_1 \qquad - 3{,}2x_3 \\ 8x_3 \;\; = 8 - 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

auf drei Nachkommastellen

a_{ii}	b_i		C		$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(6)}$	$x^{(7)}$
6	-5		2	-1	1	-0,667	-0,810	-0,786	-0,790	-0,789	-0,789	-0,789
-4	3	3		-3,2	1	0,550	0,626	0,614	0,615	0,615	0,615	0,615
8	8	-2	-3		1	0,960	0,968	0,966	0,967	0,967	0,967	0,967
		C_L		C_R							höchstens 7 Iterationen	

auf zwei Nachkommastellen

a_{ii}	b_i		C		$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
6	-5		2	-1	1	-0,667	-0,810	-0,786	-0,790
-4	3	3		-3,2	1	0,550	0,626	0,614	0,615
8	8	-2	-3		1	0,960	0,968	0,966	0,967
		C_L		C_R					

d)

$$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -6 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11 \\ -2x_1 + 3x_2 + 13x_3 - 5x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = -6 \quad + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 \\ -9x_2 = 11 - 3x_1 \quad - 3x_3 + 2x_4 \\ 13x_3 = 8 + 2x_1 - 3x_2 \quad + 5x_4 \\ 9x_4 = -1 - 3x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

	3	-2	4
-3		-3	2
2	-3		5
-3	-1	4	

-3			
2	-3		
-3	-1	4	