Lösung4 Mathematik II (Statistik)

Übungen zum Thema 6 - Testverfahren

AUFGABE 1 10 PUNKTE

Ein Betrieb stellt Bohrwerkzeuge für die computergestützte Fertigung (CAM) her.
Die Bohrkegel haben einen Außendurchmesser von 40 mm.
Der Außendurchmesser ist einigermaßen normalverteilt.
Bei der Endkontrolle wird dieser Außendurchmesser überprüft.
Die Bohrer werden in Stückzahlen ab 600 Stück hergestellt.
Aus der Produktion wird eine Stichprobe von 27 Bohrer entnommen.
Die Messungen ergaben im Mittel einen Außendurchmesser von 40,05 mm bei einer Standardabweichung von 0,1 mm.
Zur Sicherung der Qualität arbeitet der Betrieb mit einem Signifikanzniveau von 2%.
Geben Sie bei Ihren Antworten auch die Einheiten an.

a) Prüfen Sie genau, welche Verteilung hier verwendet werden kann.
Begründen Sie Ihre Ansicht. [3 P.]

b) Prüfen Sie, ob unter diesen Bedingungen der Sollwert von 40 mm eingehalten wird.
Kann man die Nullhypothese bestätigen? [3 P.]

c) Angenommen, die Produktion hätte nur einen Umfang von 500 Stück gehabt.
Es wird eine Stichprobe von 31 Stück aus der Produktion entnommen.
Die Qualitätssicherung verlangt einen Sicherheitsgrad von 99%.
Prüfen Sie, ob unter diesen Bedingungen die Nullhypothese beibehalten werden kann. [4 P.]

a) (1) Stetige Zufallsvariable: npq > 9, Prüfung nicht erforderlich
(2) σ unbekannt, n < 30, also muss die Student-t-Verteilung benutzt werden
(3) ohne Zurücklegen, n/N = 27/600 = 0,045 < 0,05, also kann man den Korrekturfaktor vernachlässigen

b) $1 - \alpha = 0{,}98$. $\mu_0 = 40$ mm. $\bar{x} = 40{,}05$ mm. $\sigma = s = 0{,}1$ mm.
$\nu = 27 - 1 = 26$. $D_{26}(t) = 0{,}98$. $t_{crit} = 2{,}479$.

$$t_{empirisch} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{40{,}05 - 40}{\frac{0{,}1}{\sqrt{27}}} = 2{,}598 > t_{crit}$$ *es besteht ein signifikanter Unterschied.*

nein, die Nullhypothese kann man nicht bestätigen, weil $t_{emprisch} > t_{kritisch}$.

c) jetzt gilt: σ unbekannt, n > 30, also muss die Student-t-Verteilung nicht benutzt werden
jetzt gilt; n/N = 31/500 = 0,062 > 0,05, also muss der Korrekturfaktor berücksichtigt werden, $\sigma_{\bar{x}}$ ist mit $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ zu multiplizieren.

$1 - \alpha = 0{,}99$. $\mu_0 = 40$ mm. $\bar{x} = 40{,}05$ mm. $\sigma = s = 0{,}1$ mm.
z_{crit} aus $D(z) = 0{,}99$. $z_{krit} = 2{,}58$.

Es ändert sich $$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{31}} \cdot \sqrt{\frac{500-31}{500-1}} = 0{,}01796 \cdot 0{,}9399 = 0{,}01688$$

$$z_{empir} = = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x},korr}} = \frac{40{,}05 - 40}{0{,}01688} = 2{,}96$$ *(Genauwert: 2,872)*

nein, die Nullhypothese kann man nicht beibehalten, weil $z_{emprisch} > z_{kritisch}$.

AUFGABE 2 10 PUNKTE

Ein Betrieb fertigt Elektroden in einer typischen Produktionsserie von 1000 Stück.
Die Standzeit (Nutzungsdauer) ist erfahrungsgemäß normalverteilt.
In einer Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang 48 [Stück] wird eine mittlere Standzeit von 200 [Stunden, h] und eine Standardabweichung von 22 [h] ermittelt.
Geben Sie bei Ihren Ergebnissen eine passende Einheit an.

a) Zeigen Sie genau, ob hier die Standard-Normalverteilung verwendet werden kann. [2,5 P.]

b) In welchem Vertrauensbereich liegt die mittlere Standzeit in der Grundgesamtheit, wenn man ein Signifikanzniveau von 2% zu Grunde legt? [2,5]

c) Bei Qualitätskontrollen in diesem Betriebs wird bei üblichen Stichproben von 40 Elektroden mit dem Konfidenzintervall [193 ; 207] h gerechnet.
Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit arbeitet der Betrieb? [2,5]

d) Nach der Qualitätskontrolle sind die teuren Elektroden unbrauchbar.
Deshalb soll der Stichprobenumfang auf 25 Stück reduziert werden.
Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für die mittlere Standzeit in der Grundgesamtheit unter diesen Bedingungen bei $\alpha = 2\%$. [2,5]

a) (1) Zufallsvariable stetig, also ist npq > 9 nicht zu prüfen.
(2) s = 24 wird näherungsweise für σ benutzt, aber n > 30, also ist die t-Verteilung nicht erforderlich.
(3) ohne Zurücklegen n/N = 48 / 1000 = 0,048 < 0,05 also kann man den Korrekturfaktor weglassen

b) $1 - \alpha = 0{,}98 = D(2{,}33)$. $z_c = 2{,}33$.

$$\left[\bar{x} - z_c\,\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{x} + z_c\,\sigma_{\bar{X}}\right] = \left[200 - 2{,}33 \cdot \frac{22}{\sqrt{48}} ; 200 + 2{,}33 \cdot \frac{22}{\sqrt{48}}\right]$$

$= [200 - 7{,}4 ; 200 + 7{,}4] = [192{,}6 ; 207{,}4]$ h

c) Ansatz z.B. $z_{c,angewendet} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \dfrac{7}{22}\sqrt{40} = 2{,}01.$

oder: $\bar{x} - \mu = 7 = z_{c,angewendet}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}.$ $\quad 7 \cdot \sqrt{40} = z_c \cdot 22.$ $\quad z_c = 2{,}01$

$D(2{,}01) = 0{,}9556.$ $\quad \alpha = 1 - 0{,}9556 = 0{,}044 = 4{,}4\%$

d) n < 30, also STUDENT-t-Verteilung benutzen. Freiheitsgrade $\nu = 25 - 1 = 24$.
$D_{24}(t_c) = 0{,}98.$ $\quad t_c = 2{,}492.$

$$\left[200 - 2{,}492 \cdot \frac{22}{\sqrt{25}} ; 200 + 2{,}492 \cdot \frac{22}{\sqrt{25}}\right] = \left[200 - 10{,}96 ; 200 + 10{,}96\right] = \left[189 ; 211\right] \text{ h}$$

AUFGABE 3 10 PUNKTE

Ein Autohersteller behauptet, dass bei einem bestimmten, vielgekauften Fahrzeugtyp der durchschnittliche CO_2- Ausstoß unter Normal-Last 200 g/km beträgt. Bei einer Prüfstelle des TÜV werden zum Testen die Messungen an 25 Fahrzeugen dieses Typs durchgeführt.
Dabei ergab sich ein Stichprobenmittelwert von 210 g/km bei einer Varianz von 484.
Geben Sie bei Ihren Antworten auch die Einheiten an.

a) Prüfen Sie genau, welche Verteilung hier verwendet werden kann.
Begründen Sie Ihre Ansicht.

c) Kann man mit einem Signifikanzniveau von 0,01 die Nullhypothese H_0 verwerfen?

d) Angenommen, von diesem Autotyp werden nur 400 Stück gebaut.
Bearbeiten Sie den Aufgabenteil c) unter dieser neuen Bedingung.

a) (1) stetige Zufallsvariable: npq>9 Prüfung nicht erforderlich
(2) σ unbekannt, n < 30, also muss STUDENT-t-Verteilung benutzt werden
(3) ohne Zurücklegen. n/N < 0,05 , weil N groß ist "vielgekauften".
also kann man den Korrekturfaktor vernachlässigen.

c) $1 - \alpha = 0{,}99$. $\mu_0 = 200$ g/km, $x\gamma = 210$ g/km, $s = \sigma = \sqrt{484} = 22$ g/km.
$\nu = 25 - 1 = 24$. $D_\nu(t) = D_{24}(2{,}797) = 0{,}99$

$$t_{\text{empirisch}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{210 - 200}{\frac{22}{\sqrt{25}}} = 2{,}27 < t_{\text{crit.}}$$

nein, die Nullhypothese kann nicht verworfen werden, weil $t_{empirisch} < t_{kritisch}$.

d) jetzt ist N = 400, n/N = 25/400 = 0,0625 > 0,05, also müssen wir den Korrekturfaktor berücksichtigen. Außerdem müssen wir wieder σ durch s ersetzen:

Es ändert sich $\sigma_{x\Gamma}$: $\sigma_{\bar{\bar{x}}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{22}{\sqrt{25}} \cdot \sqrt{\frac{400-25}{400-1}} = 4{,}4 \cdot 0{,}969 = 4{,}264$

$t_{crit} = 2{,}797$ wie oben, . $t_{\text{empirisch}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{\bar{x}}}} = \frac{210 - 200}{4{,}264} = 2{,}35 < t_{\text{crit.}}$

Die Nullhypothese kann auch unter diesen Bedingungen nicht verworfen werden, weil $t_{empirisch} < t_{kritisch}$.